

Ift 2421

Chapitre 6

Résolution
des équations
différentielles:

Conditions initiales

Résolution numérique des équations différentielles

Rappels:

2 grandes classes:

1. Les équations différentielles ordinaires:
une seule variable.
2. Les équations aux dérivées partielles:
plusieurs variables.
(équation de la chaleur, des ondes, ...)

Ordre d'une équation différentielle : dérivée la plus élevée.

Équation différentielle linéaire :

$$\text{émission radioactive : } \frac{dR(t)}{dt} = -\lambda R(t)$$

Équation différentielle non linéaire :

$$\text{Variation de population : } \frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)^{1.7}$$

$$\text{Convection : } \frac{du(t)}{dt} = -k(u(t) - T)^{\frac{5}{4}}$$

nécessite des conditions initiales.

Résolution numérique des équations différentielles

Exemple du pendule :

Équation différentielle non linéaire
du second ordre.

Impossible de trouver une solution analytique.

Pour de petit mouvements :
 $\text{Sin}(\theta) \approx \theta$

Équation du pendule:

t: temps

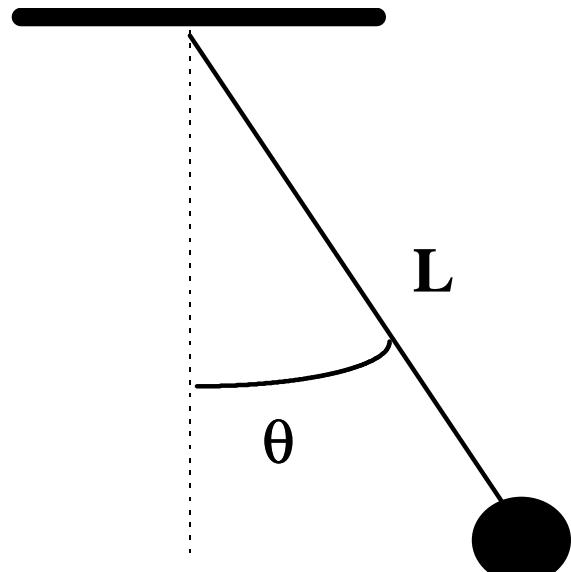
θ : Position angulaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \text{Sin}(\theta) = 0$$

Conditions initiales usuelles:

$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$$



Méthode des séries de Taylor

Ordre 1:

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) \\y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

Développement de Taylor au voisinage de $t_j = t_0 + j h$

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + \frac{h^3}{6} y'''(t_j) + O(h^4)$$

Devient:

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) + \frac{h^3}{6} f''(t_j, y_j) + O(h^4)$$

Remarques:

1. L'ordre local est en h^4 .
2. Pas d'estimée de l'erreur.
3. Les dérivées de la fonction $f(t, y(t))$ se font:

$$\frac{df}{dt} = f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f$$

4. Si l'ordre local est en h^n , **l'ordre global** sera en h^{n-1} .

Exemple:

Appliquer la méthode de Taylor avec un pas $h = 0.1$
et un ordre local en h^3 pour:

$$y'(t) = f(t, y(t)) = -t \cdot y^2(t)$$
$$y(t_0) = y_0 = 1$$

Solution analytique: $y(t) = \frac{2}{2 + t^2}$

Le pas est $h = 0.1$, nous allons calculer les valeurs de $y(t)$ pour
 $t = 0, t = 0.1, t = 0.2, \dots$, etc.

Si nous utilisons un ordre local en h^3 , nous avons:

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + O(h^3)$$

Exprimons $y''(t)$

$$y''(t) = f'(t, y(t)) = -y^2(t) + (-t) 2 y(t) y'(t)$$

or $y'(t) = f(t, y(t)) = -t \cdot y^2(t)$

donc $y''(t) = -y^2(t) + (-t) 2 y(t) (-t \cdot y^2(t))$

$$y''(t) = -y^2(t) + 2 t^2 y^3(t)$$

La formule de Taylor d'ordre local h^3 devient alors:

$$y_{j+1} = y_j + h(-t_j y^2(t_j)) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_j) + 2 t_j^2 y^3(t_j)) + O(h^3)$$

pour $t_1 = t_0 + h$

$$y_1 = y_0 - h t_0 y^2(t_0) + \frac{0.1^2}{2}(-y^2(t_0) + 2 t_0^2 y^3(t_0))$$

$$y_1 = 1 - 0.005 = 0.995$$

Valeur exacte: $y(0.1) = \frac{2}{2+0.1^2} = \frac{2}{2.01} \approx 0.99502487\dots$

pour $t_2 = t_0 + 2h$

$$y_2 = y_1 - h t_1 y^2(t_1) + \frac{h^2}{2}(-y^2(t_1) + 2 t_1^2 y^3(t_1))$$

$$y_2 = 0.995 - 0.1 (0.1(0.995)^2) + \frac{0.1^2}{2}(-(0.995)^2 + 2 \cdot 0.1^2 (0.995)^3)$$

$$y_2 = 0.9802486\dots$$

Valeur exacte: $y(0.2) = \frac{2}{2+0.2^2} = \frac{2}{2.04} \approx 0.980392156\dots$

pour $t_3 = t_0 + 3h$

Etc.

Ordre global h^2 .

Méthode d'Euler (ordinaire)

Ordre 1:

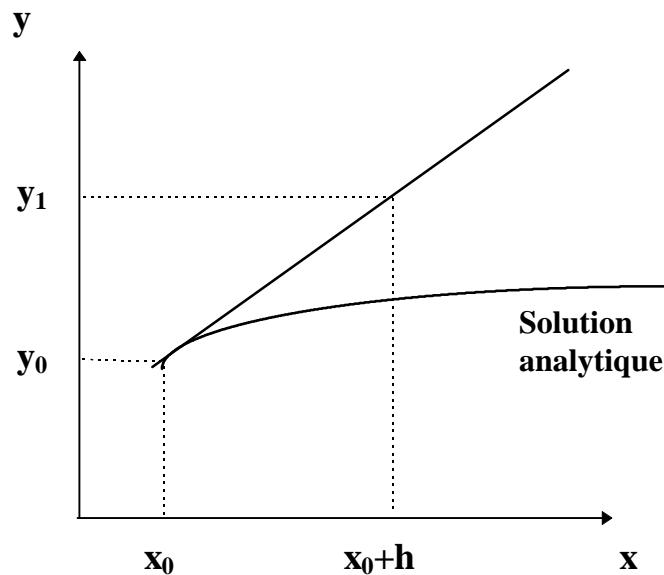
$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(t_0) = y_0$$

Méthode d'Euler = Méthode de Taylor
d'ordre local en h^2 .
Ordre global en h .

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + O(h^2)$$

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j)) + O(h^2)$$

Interprétation géométrique:



Erreur globale vs Erreur locale

Y_n = Valeur calculée en x_n .

y_n = Valeur exacte en x_n .

$$e_n = y_n - Y_n = \text{erreur en } Y_n; \quad Y_n = y_n + e_n$$

Avec la méthode d'Euler, nous avons:

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(t_n, Y_n)$$

En utilisant les séries de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\mathbf{x}_n) \quad \text{avec } x_n \leq \mathbf{x}_n \leq x_n + h$$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n - Y_n + h [f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h \left[\frac{f(x_n, y_n) - f(x_n, Y_n)}{(y_n - Y_n)} \right] (y_n - Y_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$e_{n+1} = e_n + h f_y(x_n, \eta_n) e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \quad \text{avec } \eta_n \text{ entre } y_n \text{ et } Y_n$$

$$e_{n+1} \leq (1+hK)e_n + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Erreur globale vs Erreur locale (suite)

$$e_0 = 0$$

$$e_1 \leq (1+hK)e_0 + \frac{h^2}{2}y''(\xi_0) = \frac{1}{2}h^2y''(\xi_0)$$

$$e_2 \leq (1+hK)\left[\frac{1}{2}h^2y''(\xi_0)\right] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_1) = \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)y''(\xi_0) + y''(\xi_1)\right]$$

$$e_3 \leq \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)^2y''(\xi_0) + (1+hK)y''(\xi_1) + y''(\xi_2)\right]$$

...

$$e_n \leq \frac{1}{2}h^2\left[(1+hK)^{n-1}y''(\xi_0) + (1+hK)^{n-2}y''(\xi_1) + \dots + 1y''(\xi_{n-1})\right]$$

$$e_n \leq \frac{1}{2}h^2M\left[(1+hK)^{n-1} + (1+hK)^{n-2} + \dots + 1\right]$$

Sachant que :

$$1 + s + s^2 + \dots + s^{n-1} = \frac{s^n - 1}{s - 1}$$

Nous obtenons :

$$e_n \leq \frac{1}{2}h^2M \frac{(1+hK)^n - 1}{(1+hK) - 1} \Leftrightarrow e_n \leq \frac{hM}{2K}(1+hK)^n - \frac{hM}{2K}$$

$$e^{hK} = 1 + hK + \frac{(hK)^2}{2} + \frac{(hK)^3}{3} + \dots \quad \text{Maclaurin}$$

$$1 + hK < e^{hK} \quad (K > 0)$$

$$e_n \leq \frac{hM}{2K}(e^{hK})^n - \frac{hM}{2K} = \frac{hM}{2K}\left(e^{nhK} - 1\right) = \frac{hM}{2K}\left(e^{(x_n - x_0)K} - 1\right) = O(h)$$

Méthode d'Euler modifiée

Taylor d'ordre local en h^3 :

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2} f'(t_j, y_j) + O(h^3)$$

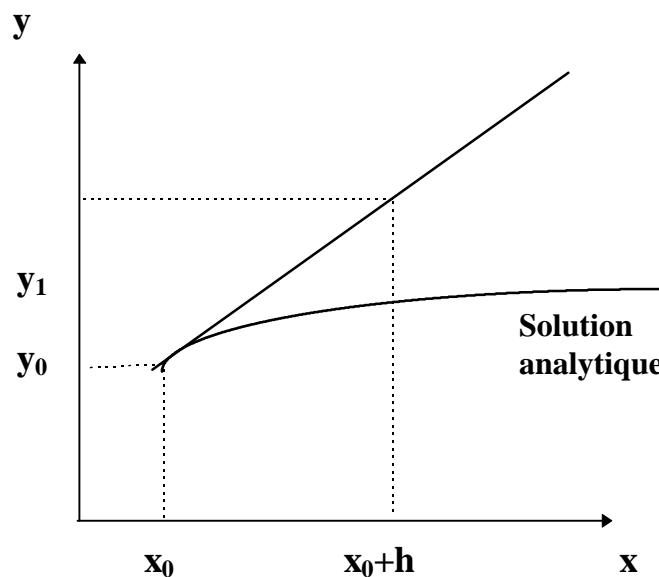
Différence avant pour évaluer f' :

$$f'(t_j, y_j) = \frac{f(t_{j+1}, y_{j+1}) - f(t_j, y_j)}{h} + O(h)$$

Formule d'Euler modifiée :

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})] + O(h^3)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [y'_j + y'_{j+1}] + O(h^3)$$



Méthode d'Euler ordinaire

Algorithme

y_0 donné

$$y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

Une seule étape de calcul

Ordre global en h .

Méthode d'Euler ordinaire

Pour résoudre:

$$y'(t) = -t \ y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

t_j	y_j	erreur
0.1	1.0000	-5.0 10^{-3}
0.2	0.9900	-9.6 10^{-3}
0.3	0.9704	-1.3 10^{-2}
0.4	0.94215	-1.6 10^{-2}

Méthode d'Euler modifiée

Algorithme

y_0 donné

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j))$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})]$$

Deux étapes de calcul:

1. la **prédition**.
2. La **correction**.

Ordre global en h^2 .

Méthode d'Euler modifié

Pour résoudre:

$$y'(t) = -t \ y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

t_i	y_i prédit	y_i corrigé	erreur
0.1	1.000000	0.995000	2.5 10^{-5}
0.2	0.985100	0.980346	4.6 10^{-5}
0.3	0.961124	0.956878	6.0 10^{-5}
0.4	0.929410	0.925868	6.0 10^{-5}
0.5	0.891579	0.888851	3.8 10^{-5}
0.6	0.847458	0.847458	5.2 10^{-8}

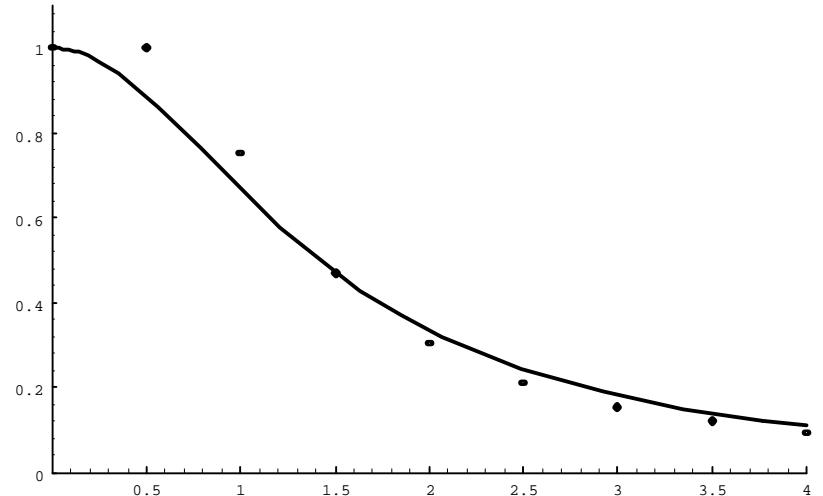
Note: L'étape de correction peut être répétée 2 à 3 fois, au delà, il est préférable de réduire h .

Méthode d'Euler ordinaire

$$y'(t) = -t \cdot y^2(t)$$
$$y(0) = 1$$

$h = 0.5$

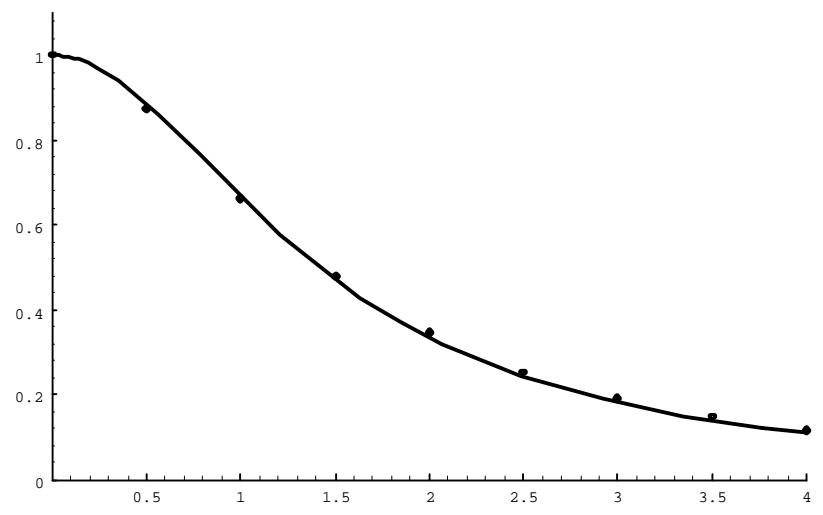
t_j	y_j
0	1
0.5	1
1.	0.75
1.5	0.46875
2.	0.303955
2.5	0.211566
3.	0.155616
3.5	0.119291
4.	0.0943882



Méthode d'Euler Modifié

$h = 0.5$

t_j	y_j
0	1
0.5	0.875
1.	0.662472
1.5	0.479149
2.	0.345942
2.5	0.254107
3.	0.191201
3.5	0.147512
4.	0.116497



Méthode de Runge Kutta

Développement à l'ordre 2

y_0 donné

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + a k_1 + b k_2 \end{aligned}$$

Trouver les valeurs de : a, b, α et β .

Développement de Taylor :

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f'(x_n, y_n) + O(h^3)$$

or

$$\begin{aligned} f'(x_n, y_n) &= (f_x + f_y y')_n \\ &= (f_x + f_y f)_n \\ y_{n+1} &= y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f)_n + O(h^3) \end{aligned} \quad (1)$$

Algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 :

$$y_{n+1} = y_n + ah f(x_n, y_n) + bh f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$$

Développons au premier ordre :

$$\begin{aligned} f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) &\equiv f_n + (f_x)_n \alpha h + (f_y)_n \beta h f_n \\ y_{n+1} &= y_n + (a+b)h f_n + h^2 \left\{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Méthode de Runge Kutta : développement à l'ordre 2

y_0 donné

$$\begin{aligned}k_1 &= h f(x_n, y_n) \\k_2 &= h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\y_{n+1} &= y_n + a k_1 + b k_2\end{aligned}$$

Trouver les valeurs de : a, b, α et β .

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_x + f_y f)_n + O(h^3) \quad (1)$$

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)h f_n + h^2 \left\{ (f_x)_n \alpha b + (f_y)_n \beta b f_n \right\} \quad (2)$$

En forçant (1) = (2), nous avons :

$$a + b = 1$$

$$a b = \frac{1}{2}$$

$$b b = \frac{1}{2}$$

Ordre local en h^3
Ordre global en h^2 .

Choix Courants :

$$a = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = \beta = 1 \rightarrow \text{Type I : Euler modifié}$$

$$a = 0 \rightarrow b = 1 \text{ et } \alpha = \beta = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Type II}$$

$$a = \frac{2}{3} \rightarrow b = \frac{1}{3} \text{ et } \alpha = \beta = \frac{3}{2} \rightarrow \text{Type III}$$

Méthode de Runge Kutta d'ordre global 2

Le plus courant :

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{3}{2}h, y_n + \frac{3}{2} k_1\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + O(h^3)$$

Méthode de Runge Kutta d'ordre global 4

Le plus courant :

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(h^5)$$

Les méthodes de Runge Kutta sont très efficaces car :

1. Elles suivent de près la solution analytique.
2. Avec une valeur du pas relativement élevé.
3. Moins coûteux que les autres méthodes pour un $O(h^n)$ donné.

Méthode de Runge Kutta d'ordre global h^4 :

$$y'(t) = -t \cdot y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

t_j	y_j	y_{j Réel}
0	1	1
0.1	0.9950249	0.9950249
0.2	0.9803922	0.9803922
0.3	0.9569377	0.9569378
0.4	0.9259258	0.9259259

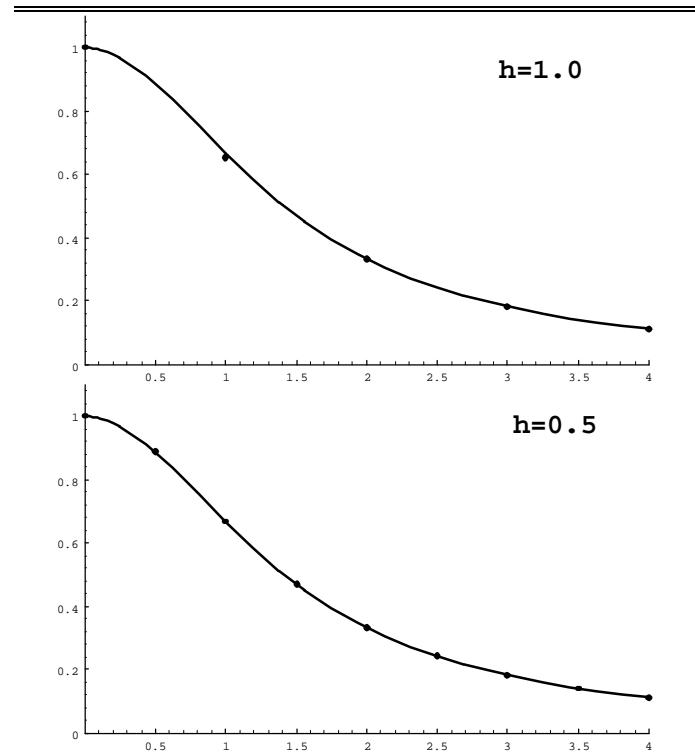
Pas encore d'approximation de l'erreur commise.

Nécessité de choisir le pas en fonction de l'erreur maximale recherchée.

Solution : calculer avec un pas égal à $h, h/2, \dots$
Jusqu'à la stabilité de la solution.

Coût élevé !

Les méthodes qui ajustent le pas sont dites méthodes **à pas adaptatif**.



Algorithme de Runge Kutta Merson d'ordre global 4 avec estimé de l'erreur.

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1) \quad k_3 = h f(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3) \quad k_5 = h f(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^5)$$

$$E \approx \left[\frac{1}{15}k_1 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{15}k_4 - \frac{1}{30}k_5 \right]$$

Algorithme de Runge Kutta Fehlberg d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.

y_0 donné

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1) \quad k_3 = h f(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = h f(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = h f(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5 + O(h^6)$$

$$E \approx \left[\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right]$$

Exemple : Algorithme de Runge Kutta Fehlberg
d'ordre global 5 avec estimé de l'erreur.

$$y'(t) = -t \cdot y^2(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

t_j	y_j	Erreur
0	1	0.0
0.1	0.95025	$7.47241 \cdot 10^{-8}$
0.2	0.980392	$1.97673 \cdot 10^{-7}$
0.3	0.956938	$2.75904 \cdot 10^{-7}$
0.4	0.925926	$2.98256 \cdot 10^{-7}$
0.5	0.888889	$2.69385 \cdot 10^{-7}$
0.6	0.847457	$2.01399 \cdot 10^{-7}$

$$y_6 = \underline{0.847457}$$

Méthode efficace et populaire
avec contrôle de l'erreur.

Méthodes à pas unique

utilisent seulement le pas précédent :

$$y_n \text{ et } y'_n$$

Exemples :

Méthodes de Taylor et de Runge Kutta.

Méthodes à pas multiples (multistep methods)

utilisent plusieurs pas précédents :

$$y_n \text{ et } y'_n$$

et aussi y_{n-1} et y'_{n-1}

(y_{n-2} et y'_{n-2} possible)

Méthodes ouvertes

n'utilisent que les valeurs précédentes

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \dots$$

Méthodes fermées

(de type prédiction correction)

utilisent autant les valeurs précédentes

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \dots$$

que les valeurs suivantes
 $y_{n+1}, y_{n+2} \dots$

Exemple : méthode d'Euler modifiée.

Méthode d'Adams

Équations différentielles sous la forme

$$dy = f(x, y) dx$$

à intégrer sur $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx$$

remplacer la fonction $f(x, y(x))$
par un polynôme de collocation : $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

Polynôme quadratique de Newton Grégory descendant :

$$P_2(s) = f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{6} h^3 f'''(\xi)$$

Calcul des intégrales :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left[f_n + \frac{1}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2} \right] + O(h^4) \\ &= y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] + O(h^4) \end{aligned}$$

Note :

Le résultat sera **d'ordre local n+2** pour un polynôme de degré **n**.

Attention : Degré trop élevé \Rightarrow erreurs d'arrondis.

Méthodes d'Adams

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h \left[f_n + \frac{1}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2} \right] + O(h^4) \\&= y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] + O(h^4)\end{aligned}$$

Remarques :

1. Pour démarrer, les valeurs de y'_0 , y'_1 et y'_2 (donc f_0 , f_1 , et f_2) sont nécessaires.
Amorçage : méthode de Runge Kutta.
2. Pas question d'adapter le pas directement.
3. Problème : extrapolation avec le polynôme de collocation ; moins précis qu'interpolation.

Adams (ordre local en h^3)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3f_n - f_{n-1}] + O(h^3)$$

Adams (ordre local en h^5)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + O(h^5)$$

Méthodes d'Adams Moulton (prédition correction)

2 étapes :

1. une étape de **prédition**

où nous extrapolons

\Rightarrow approximation de y_{n+1}

2. une étape de **correction**

où nous interpolons

pour trouver y_{n+1} en se servant de f_{n+1}
tel que prédit par la première étape.

Méthode d'Adams Moulton
(d'ordre local en h^4)

y_0, y_1, y_2 donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}] + O(h^4)$$

Calcul de $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} [5\tilde{f}_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}] + O(h^4)$$

Méthodes d'Adams Moulton

Remarques :

1. Le correcteur : même ordre que prédicteur, mais précision plus grande.
2. La valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.
3. Deux évaluations de la fonction f à chaque étape (comparée à 4 pour Runge Kutta du même ordre).
4. Pour amorcer : Runge Kutta du même ordre.

Méthodes d'Adams Moulton (d'ordre local ϵh^5)

y_0, y_1, y_2, y_3 donnés

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi)$$

Calcul de $\tilde{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] - \frac{19}{720} h^5 y^v(\xi)$$

Méthode d'Adams Moulton

Mesure de la précision

$$y_{exact} \approx y_{corrigé} - \frac{19}{270}(y_{corrigé} - y_{predict})$$

N décimales exactes lorsque :

$$\left| y_{corrigé} - y_{predict} \right| 10^N \leq 14.2$$

L'erreur globale est stable donc pas de divergence.

Comparaison des méthodes pour résoudre :

$$\begin{aligned} y'(t) &= -t y^2(t) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Méthode	$t_1 = 0.1$	$t_2 = 0.2$
Solution analytique	0.995025	0.980392
Euler $O(h^2)$	1.000000	0.990000
Taylor $O(h^3)$	0.995000	0.980248
Taylor $O(h^4)$	0.995000	0.980346
Euler Modifié $O(h^3)$	0.995000	0.980346
RK type II $O(h^3)$	0.995000	0.980297
RK type III $O(h^3)$	0.995000	0.980394
RK $O(h^5)$	0.995025	0.980392
Adams Moulton	0.995025	0.980392

$$y_{exact} = y_{predict} + \frac{251}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$y_{exact} = y_{corrigé} - \frac{19}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$0 = y_{predict} - y_{corrigé} + \frac{270}{720} h^5 y^v(\xi)$$

$$h^5 y^v(\xi) = \frac{720}{270} (y_{corrigé} - y_{predict})$$

Donc

$$y_{exact} = y_{corrigé} - \frac{19}{720} \frac{720}{270} (y_{corrigé} - y_{predict})$$

$$y_{exact} = y_{corrigé} - \frac{19}{270} (y_{corrigé} - y_{predict})$$

Résoudre un système d'équations différentielles du premier ordre:

Exemple:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy + t \\ \frac{dy}{dt} = ty + x \end{cases}$$

Conditions initiales:
 $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$

Méthode de Taylor avec ordre local en h^4 :

$$x_{j+1} = x_j + h x'(t_j) + \frac{h^2}{2} x''(t_j) + \frac{h^3}{6} x'''(t_j) + O(h^4)$$

$$y_{j+1} = y_j + h y'(t_j) + \frac{h^2}{2} y''(t_j) + \frac{h^3}{6} y'''(t_j) + O(h^4)$$

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = xy' + x'y + 1 \\ y'' = y + ty' + x' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''' = x'y' + xy'' + x''y + x'y' \\ y''' = y' + y' + ty'' + x'' \end{cases}$$

Euler modifié

$$\begin{cases} \tilde{x}_{j+1} = x_j + h f(t_j, x(t_j)) \\ \tilde{y}_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j)) \\ \\ \begin{cases} x_{j+1} = x_j + \frac{h}{2} [f(t_j, x_j) + f(t_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})] \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} [f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})] \end{cases} \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases}$$

Conditions initiales:
x(0) = 1 et y(0) = -1

h = 0.1

Prédiction:

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_0 + h f(t_0, x(t_0)) = 1 + 0.1[(1)(-1) + 0] = 0.9 \\ \tilde{y}_1 = y_0 + h f(t_0, y(t_0)) = -1 + 0.1[(0)(-1) + 1] = -0.9 \end{cases}$$

Correction:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, x_0) + f(t_1, \tilde{x}_1)] = 1 + \frac{0.1}{2} (-1 + [0.9(-0.9) + 0.1]) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0) + f(t_1, \tilde{y}_1)] = -1 + \frac{0.1}{2} (1 + [0.1(-0.9) + 0.9145]) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.9145 \\ y_1 = -0.9088 \end{cases}$$

Équation différentielles d'ordre supérieur

Ordre n :

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Conditions initiales :

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)} \text{ donnés pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Remarque :

Il est rarement possible de trouver une solution analytique.

Équation du pendule:
(pour de petits mouvements)
t: temps
 θ : Position angulaire

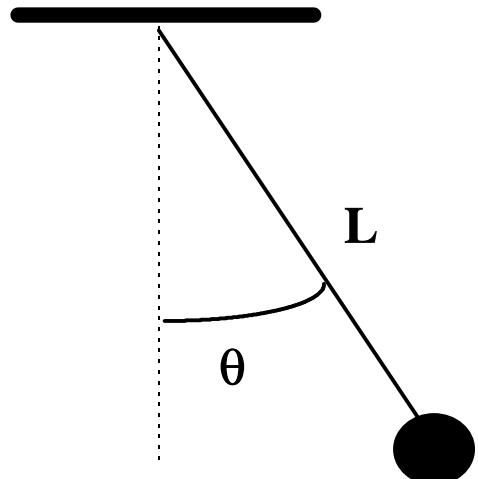
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Conditions initiales usuelles:

$$q(t_0) = q_0$$

$$q'(t_0) = q'_0$$

$$\theta'(t) = \theta_0 \cos\left(\frac{g}{L}t\right) + \frac{L}{g}\theta'_0 \sin\left(\frac{g}{L}t\right)$$



Transformation d'une équation différentielle d'ordre 2 en un système d'ordre 1 :

Ordre 2 :

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Conditions initiales :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0$$

En posant : $x(t) = y'(t)$

Système équivalent :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, y(t), x(t)) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

avec conditions initiales : $y(t_0) = y_0$ et $x(t_0) = y'_0$

Remarque:

Il est **toujours possible** de transformer
une équation différentielle d'ordre n
en un **système** d'équations différentielles d'ordre 1.

Équation différentielle d'ordre n:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Conditions initiales :

$$y^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)} \text{ donnés pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

En posant: $x_k(t) = y^{(k)}(t)$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Nous obtenons un système de n équations d'ordre 1:

$$\begin{cases} x'_0(t) = x_1(t) \\ x'_1(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x'_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ x'_{n-1}(t) = f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ = y^{(n)}(t) \end{cases}$$

Avec conditions initiales:

$$x_k(t_0) = y^{(k)}(t_0) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Exemple: Résoudre

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Conditions initiales:
 $x(0) = 0.5$ et $x'(0) = 0$

Mise sous la forme de système:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = (1-x^2)y - x \end{cases}$$

Conditions initiales:
 $x(0) = 0.5$
et $y(0) = x'(0) = 0$

Euler avec $h = 0.1$

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + h f(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \\ y_{j+1} = y_j + h f(t_j, y(t_j), y'(t_j)) \end{cases}$$

Ici $j = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h y_0 \\ y_1 = y_0 + h [(1-x_0^2)y_0 - x_0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0.5 + (0.1)(0) \\ y_1 = 0 + (0.1)[(1-0.25)0 - 0.5] \end{cases}$$

Calculer $x''(0)$ et $x''(0.1)$

$$x''(0) = (1-x_0^2)y_0 - x_0$$

$$x''(0.1) = (1-x_1^2)y_1 - x_1$$

Méthodes d'Adams Moulton d'ordre global 4

Pour les systèmes d'ordre 2.

- x_0, x_1, x_2, x_3 donnés
et y_0, y_1, y_2, y_3 donnés

- Calcul des prédicteurs :

$$\tilde{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] + O(h^5)$$

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}] + O(h^5)$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\tilde{f}_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

$$\tilde{g}_{n+1} = g(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

- Calcul des correcteurs :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [9\tilde{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}] + O(h^5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} [9\tilde{g}_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}] + O(h^5)$$

Correcteur : même ordre que le prédicteur.
Valeur exacte entre le prédicteur et le correcteur.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{cases} x' = xy + t \\ y' = ty + x \end{cases} \quad \text{avec pour conditions initiales :} \quad \begin{array}{ll} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{array}$$

	t	x	x'	t	y	y'
Valeurs de départ	0.0 0.025 0.050 0.075	1.0 0.9759 0.9536 0.9330	-1.0 -0.9271 -0.8582 -0.7929	0.0 0.025 0.050 0.075	-1.0 -0.9756 -0.9524 -0.9303	1.0 0.9515 0.9060 0.8632
Prédiction	0.10			0.10		
Correction						

- Calcul des prédicteurs :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0.1) &= x_{0.075} + \frac{0.025}{24} [55f_{0.075} - 59f_{0.05} + 37f_{0.025} - 9f_0] \\ &= 0.9330 + \frac{0.025}{24} [55(-0.7929) - 59(-0.8582) + 37(-0.9271) - 9(-1)] \\ &= 0.91396 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0.1) &= -0.9303 + \frac{0.025}{24} [55(0.8632) - 59(0.9060) + 37(0.9515) - 9(1.0)] \\ &= -0.9092296875 \end{aligned}$$

- Nouveaux estimés de la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n+1} &= f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = 0.91396(-0.9092296) + 0.1 = -0.7309995 \\ \tilde{g}_{n+1} &= g(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) = 0.1(-0.9092296) + 0.91396 = 0.823037 \end{aligned}$$

- Calcul des correcteurs :

$$\begin{aligned} x(0.1) &= 0.9330 + \frac{0.025}{24} [9(-0.7309995) + 19(-0.7929) - 5(-0.8582) + (-0.9271)] = 0.9139581 \\ y(0.1) &= -0.9303 + \frac{0.025}{24} [9(0.823037) + 19(0.8632) - 5(0.906) + 0.9515] = -0.9092274 \end{aligned}$$

$$x(0.1) = \underline{0.9139581}$$

$$y(0.1) = \underline{-0.9092274}$$

Comparaison des méthodes pour les équations différentielles

	Euler Modifié	Runge Kutta d'ordre 4	Adams Moulton
Type de méthode	Pas unique	Pas unique	Pas multiple
Erreur locale	$O(h^3)$	$O(h^5)$	$O(h^5)$
Erreur globale	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^4)$
nb d'évaluation de fonction	2	4	2
Stabilité	bonne	bonne	bonne
Facilité pour changer le pas	oui	oui	non
Recommandée	NON	OUI	OUI

Ift 2421

Chapitre 6

Résolution
des équations
différentielles:

Conditions limites

Problèmes aux limites

Équation différentielle d'ordre 2

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t))$$

Avec les 2 conditions limites :

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y(t_1) = y_1$$

Type différent de celles données
avec des conditions initiales.

Les méthodes vues précédemment ne s'appliquent pas
car nous ne connaissons pas $y'(t_0)$

Exemple :

Déformation d'une poutre :

$w(x)$: déformation en
fonction de l'abscisse x .

q : charge uniforme.

E : Coefficient d'élasticité.

L : longueur de la poutre.

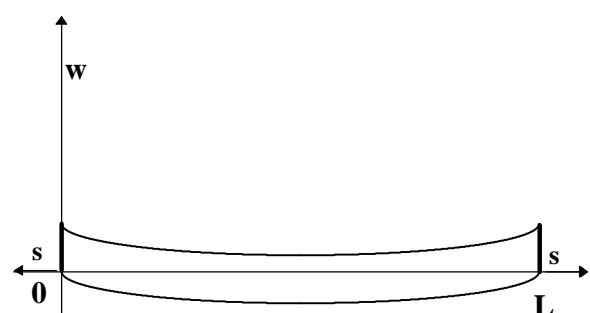
S : tension aux limites.

I : moment central d'inertie.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - L)$$

Avec les conditions limites

$$w(0) = w(L) = 0$$



Problèmes linéaires aux limites

Pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 ou d'un autre ordre tant qu'elle est linéaire.

$$y''(t) = H(t) + G(t)y(t) + F(t)y'(t) \quad (1)$$

Nous avons :

Théorème :

Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions de (1)
alors

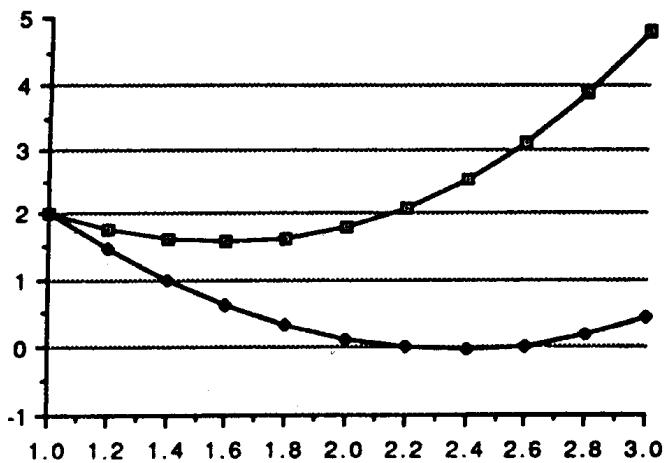
$y_3(t) = \alpha y_1(t) + (1 - \alpha) y_2(t)$
est aussi solution de (1).

Le théorème pour des
équations différentielles
linéaires seulement.

Cas homogène :

Où $H = 0$, nous acceptons
toute combinaison linéaire :

Pour tout α et β ,
 $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$
est aussi solution de (1).



Méthode de tir

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

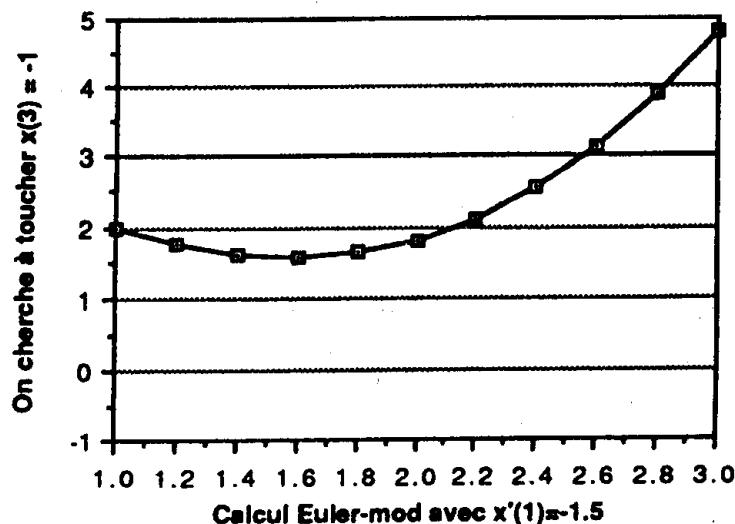
Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

On essaie un premier tir en remplaçant par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 2 \\ x'_1(1) &= -1.5 \end{aligned}$$

Premier tir:



Raté : nous trouvons $x_1(3) = 4.811$

Méthode de tir

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

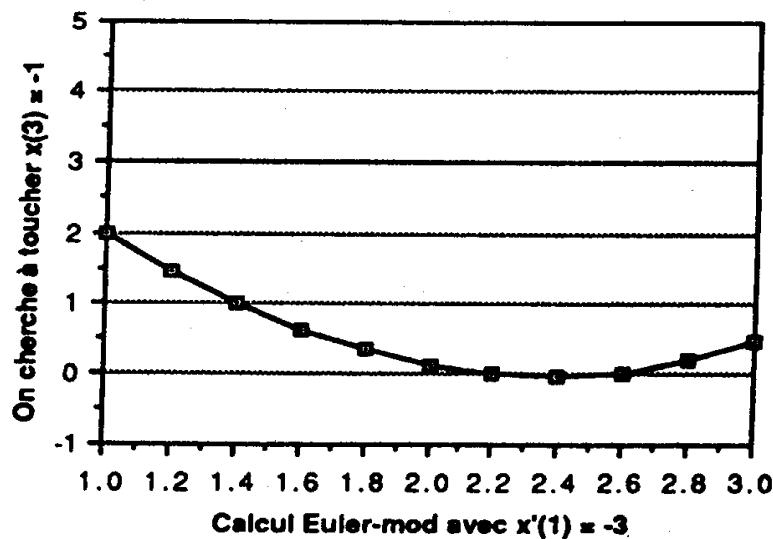
Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

On essaie un deuxième tir en remplaçant par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x_2(1) &= 2 \\ x'_2(1) &= -3 \end{aligned}$$

Deuxième tir:



Encore raté : nous trouvons $x_2(3) = 0.453$

Combinaison des tirs

Mais nous avons :

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + (1 - \alpha)x_2(t)$$

qui sera aussi une solution.
de
 $x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$

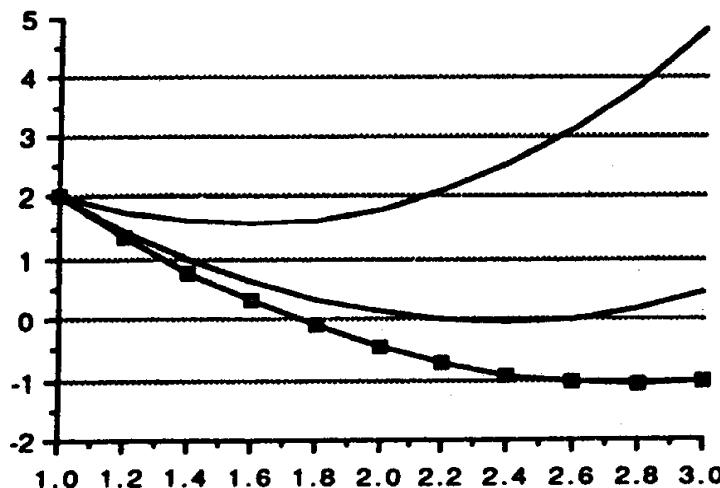
Il faut donc déterminer α pour avoir $x_3(3) = -1$.

$$\begin{aligned}x_3(3) &= \alpha x_1(3) + (1 - \alpha)x_2(3) \\-1 &= \alpha(4.811) + (1 - \alpha)(0.453)\end{aligned}$$

$$\alpha = -0.3334$$

Solution en tout point :

$$x_3(t) = -0.3334 x_1(t) + 1.3334 x_2(t)$$



Combinaison des tirs

Notes :

1. Problèmes linéaires du second ordre convergent en 2 tirs.
2. Ordre plus élevé : la méthode fonctionne aussi.
3. Ordre global et précision de la méthode employée pour les conditions initiales.
4. Peu généralisables en 2D et 3D, peu utilisée en pratique.

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1.0	2.000	2.000	2.000
1.2	1.751	1.449	1.348
1.4	1.605	0.991	0.786
1.6	1.561	0.619	0.305
1.8	1.625	0.328	-0.105
2.0	1.803	0.118	-0.444
2.2	2.105	-0.007	-0.711
2.4	2.542	-0.045	-0.908
2.6	3.128	0.013	-1.026
2.8	3.880	0.175	-1.061
3.0	4.811	0.453	-1.000

Pour les équations non linéaires :

- Convergence de la méthode de tir comme une méthode de point fixe.

$$X(3)=f(x'(1))$$

- peu de chance que l'interpolation linéaire procure la solution exacte.

- Sert à estimer la prochaine pente.

Problème non linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)x'(t)$$

avec CL : $x(1)=2$ et $x(3)=-1$

Valeur assumée pour $x'(1)$	valeur Calculée pour $x(3)$
-1.5	-0.016
-3.0	-2.085
-2.213*	-1.271
-2.0	-0.972
-1.8	-0.642
-2.017*	-0.998
-2.01	-0.987
-2.02	-1.002
-2.018*	-1.000

*valeur obtenue par interpolation linéaire.

Méthodes des différences finies

2 étapes :

1. Étape de discrétisation :

- Diviser l'intervalle en sous intervalle de longueur h.
- Dérivées approchées par des formules de différence.

2. Résolution du système discrétisé :

- Systèmes linéaires pour des équations différentielles linéaires et systèmes non linéaires pour des équations différentielles non linéaires.
- Propriétés mathématiques des matrices obtenues par discrétisation (matrices tridiagonales, ou symétriques, ou définies positives).

Problème linéaire à résoudre

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$

Différences centrées :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Substituer ces formules dans l'équation différentielle et choisir un pas.

Méthodes des différences finies

Étape de discréétisation

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

Pour $i = 2, \dots, n-1$

avec $t_i = t_1 + (i-1)h$ et $x_i = x(t_i)$

Nous avons: $t_1=1$ et $x_1=2$ $t_n=3$ et $x_n=-1$

Précision de l'approximation:

- Valeur du pas h
- Type de différences utilisées.

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2t_i$$

Remarque:

Ici: $O(h^2)$

Appliquer la technique d'extrapolation de Richardson.

Calculer une solution $x_i^{(1)}$ avec un pas h .

Calculer une solution $x_{2i+1}^{(2)}$ avec un pas $2h$.

Ensuite grâce à l'extrapolation de Richardson, calculer une nouvelle solution.

$$x_{2i+1}^{(extrapolation)} = x_{2i+1}^{(2)} + \frac{1}{3}(x_{2i+1}^{(2)} - x_{2i+1}^{(1)})$$

Méthodes des différences finies

Pour $i = 2, \dots, n-1$

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2 t_i$$

Nous avons: $t_1=1$ et $x_1=2$, $t_n=3$ et $x_n=-1$

Considérons $h = 0.5$:

$$x_1 - [2 + h^2(1 - 0.2t_2)]x_2 + x_3 = h^2 t_2$$

$$x_2 - [2 + h^2(1 - 0.2t_3)]x_3 + x_4 = h^2 t_3$$

$$x_3 - [2 + h^2(1 - 0.2t_4)]x_4 + x_5 = h^2 t_4$$

$$\begin{bmatrix} -2.175 & 1 & 0 \\ 1 & -2.150 & 1 \\ 0 & 1 & -2.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.625 \\ 0.500 \\ 1.625 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons: $x_1 = 2$

$$x_2 = 0.552$$

$$x_3 = -0.424$$

$$x_4 = -0.964$$

$$x_5 = -1$$

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites : $x(1) = 2$ et $x(3) = -1$

Pour $h=0.2$:

$$\begin{bmatrix} -2.0304 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.0288 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.0272 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.0256 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0240 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0224 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0208 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0192 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.0176 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1.952 \\ 0.056 \\ 0.064 \\ 0.072 \\ 0.080 \\ 0.088 \\ 0.096 \\ 0.104 \\ 1.112 \end{bmatrix}$$

Note: le système est tridiagonal.

Résultats:

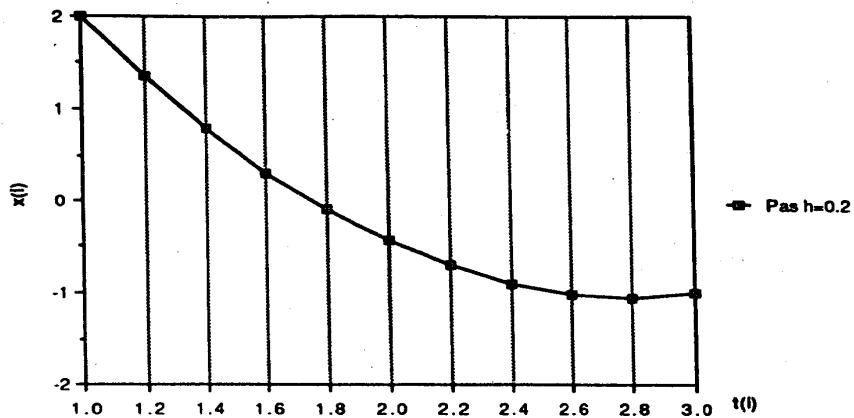
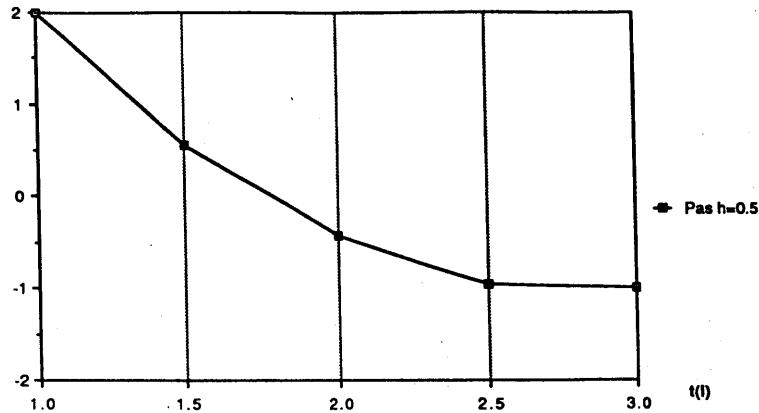
t	Méthode des différences finies	Méthode de tir
1.0	2.000	2.000
1.2	1.351	1.348
1.4	0.792	0.787
1.6	0.311	0.305
1.8	-0.097	-0.104
2.0	-0.436	-0.443
2.2	-0.705	-0.712
2.4	-0.903	-0.908
2.6	-1.022	-1.026
2.8	-1.058	-1.060
3.0	-1.000	-1.000

Méthodes des différences finies

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites (frontières) :

$$x(1) = 2 \text{ et } x(3) = -1$$



Conditions limites sur les dérivées. Méthode de tir.

$$x''(t) = t + (1 - 0.2 t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :
 $x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Essais sur la valeur de $x(1)$:

On essaie 2 tirs en remplaçant par les conditions initiales:

Premier tir: $x_1(1) = 2$ et $x'_1(1) = 0$

Deuxième tir: $x_2(1) = 8$ et $x'_2(1) = 0$

Combiner les 2 solutions avec $x'_1(3)$ et $x'_2(3)$

$x'_1(3)$ et $x'_2(3)$ sont estimées avec la formules des différences divisées.

Conditions limites sur les dérivées. Méthode des différences finies.

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites :

$$x'(1) = 0 \text{ et } x'(3) = -1$$

Se discrétise en :

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = t_i + (1 - 0.2t_i)x_i$$

$$x_{i-1} - [2 + h^2(1 - 0.2t_i)]x_i + x_{i+1} = h^2t_i$$

Mais maintenant, cela est valable pour $i = 1, \dots, n$.

Nous rajoutons 2 points : (t_0, x_0) et (t_{n+1}, x_{n+1})
tels que:

$$x_2 - x_0 = 2h x'(t_1)$$

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 2h x'(t_n)$$

Remarque:

Nous connaissons les dérivées aux limites
 $x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Exemple:

$$x''(t) = t + (1 - 0.2t)x(t)$$

Avec les conditions aux limites : $x'(1) = 0$ et $x'(3) = -1$

Considérons $h = 0.5$:

$$x_1 - [2 + h^2(1 - 0.2t_2)]x_2 + x_3 = h^2t_2$$

$$x_2 - [2 + h^2(1 - 0.2t_3)]x_3 + x_4 = h^2t_3$$

$$x_3 - [2 + h^2(1 - 0.2t_4)]x_4 + x_5 = h^2t_4$$

$$x_2 - x_0 = 2h x'(t_1)$$

$$x_6 - x_4 = 2h x'(t_5)$$

$$\begin{bmatrix} -2.2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2.175 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2.15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.125 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.250 \\ 0.375 \\ 0.500 \\ 0.625 \\ 1.750 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -3.4795$
$x_2 = -3.70245$
$x_3 = -4.19833$
$x_4 = -4.82395$
$x_5 = -5.42757$