

**Ift 2421**

# **Chapitre 7**

**Introduction**

**aux valeurs propres**

**et**

**aux vecteurs propres**

## Définition :

Si  $A$  est une matrice de  $n \times n$ , alors un vecteur non nul  $x$  est dit vecteur propre de  $A$  si

$$Ax = \lambda x$$

$\lambda$  est appelé **valeur propre** de  $A$ ,  
et  $x$  **vecteur propre** de  $A$  correspondant à  $\lambda$ .

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si  $\lambda > 1$  Dilatation.

Si  $0 < \lambda < 1$  Contraction.

Si  $\lambda < 0$  Changement de direction.

## Calcul analytique des valeurs propres et des vecteurs propres

$$Ax = \lambda x$$

$\Leftrightarrow$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Nous avons une solution non nulle ssi

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{Équation caractéristique de } A.$$

Les valeurs satisfaisant cette équation sont les **valeurs propres** de A.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de A est  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

Exemple : trouver les valeurs propres de:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

et trouver les vecteurs propres de:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 10 - I & 0 & 0 \\ 1 & -3 - I & -7 \\ 0 & 2 & 6 - I \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont:  $\lambda_1=10$ ,  $\lambda_2=4$  et  $\lambda_3=-1$

$\lambda_1=10$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0x_1 = 0 \\ x_1 - 13x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{33} \\ x_3 = \frac{1}{33} \end{cases}$$

$\lambda_2=4$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 = 0 \\ x_1 - 7x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$\lambda_3=-1$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x_1 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

## La localisation des valeurs propres : Théorème de Gerschgorin

$$Ax = \lambda x$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n.$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$$

Si nous choisissons  $x_i$  tel que  $|x_i| = \max_j |x_j|$

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right|$$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \left| \frac{x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Posons

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

C'est à dire la sommation des valeurs absolues des éléments de la ligne  $i$  sauf  $a_{ii}$ .

## La localisation des valeurs propres

Les disques de Guerschgorin sont définis par :

$$D_i = \left\{ \lambda \mid |\lambda - a_{ii}| \leq r_i \right\}, \quad i = 1 \text{ à } n.$$

Théorème :

**Les valeurs propres de la matrice A sont éléments de l'union des disques  $D_i$ .**

$$S = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

Note :

1. On vérifie toutes les possibilités pour  $i = 1 \text{ à } n$  qui pourraient vérifier  $|x_i| = \max_j |x_j|$  pour chaque valeur (vecteur) propres.
2. Puisque les valeurs propres peuvent être complexes, nous obtenons des disques dans le plan complexe.
3. Si la matrice A est symétrique, les valeurs propres sont réelles et les disques deviennent de simples intervalles.
4.  $a_{ii}$  : centre du disque.  $r_i$  : rayon du disque.

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \left\{ \lambda \mid |\lambda - a_{11}| \leq r_1 \right\}, \quad r_1 = \sum_{j=2}^3 |a_{ij}|.$$

$$|\lambda - 4| \leq 2$$

$\lambda$  peut être complexe :  $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$

$$|(\lambda_R - 4) + i(\lambda_I - 0)| \leq 2$$

$$\sqrt{(\lambda_R - 4)^2 + (\lambda_I)^2} \leq 2$$

$$(\lambda_R - 4)^2 + (\lambda_I)^2 \leq 4$$

D<sub>1</sub> : centre = (4,0), rayon = 2

D<sub>2</sub> : centre = (1,0), rayon = 2

D<sub>1</sub> : centre = (-6,0), rayon = 2

## La localisation des valeurs propres

Corollaires :

1. Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont aussi éléments de l'union des disques  $D_i^T$  construit à partir de sa transposée  $A^T$  :

$$S^T = \bigcup_{i=1}^n D_i^T$$

Note : En effet,  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes valeurs propres.

2. Les valeurs propres de la matrice  $A$  appartiennent donc à l'intersection de  $S$  et  $S^T$  :

$$\lambda \in (S \cap S^T)$$

3. Une borne supérieure pour la plus grande valeur propre est donc :

$$|\lambda| \leq \min \left\{ \max_{i=1 \dots n} \left[ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right], \max_{j=1 \dots n} \left[ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \right\}$$

Exemple (suite) : pouvons nous améliorer le résultat ?

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$D_1^T$  : centre = (4,0), rayon = 3

$D_2^T$  : centre = (1,0), rayon = 1

$D_3^T$  : centre = (-6,0), rayon = 2

$$\lambda \in (S \cap S^T)$$

$$\lambda_1 = -5.7685$$

$$\lambda_2 = 3.4694$$

$$\lambda_3 = 1.2992$$

Note : corollaire 3 :

$$|\lambda| \leq \min \{ \max[6,3,8], \max[7,2,8] \}$$

## Démonstration du corollaire 3

$$Ax = \lambda x$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } n.$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$$

$$\begin{aligned} \text{Il y a un } i \text{ tel que : } |x_i| &= \max_j |x_j| \\ |\lambda| &\leq \sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| \frac{|x_j|}{|x_i|} \\ |\lambda| &\leq \sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| \end{aligned}$$

Nous ne connaissons pas le  $i$  en question, nous choisissons le max des sommes des éléments des lignes.

$$|\lambda| \leq \max \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Si nous considérons  $A^T$ , la transposée de  $A$  :

$$|\lambda| \leq \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$|\lambda| \leq \min \left\{ \max_{i=1 \dots n} \left[ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right], \max_{j=1 \dots n} \left[ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \right\}$$

## Méthode des puissances

Supposons que nous cherchions la plus grande valeur propre de la matrice A (n x n) et que cette matrice possède n vecteurs **linéairement indépendants**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  qui sont dans l'ordre.

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$$

La valeur propre  $\lambda_1$  est dite **dominante**.

Tout vecteur x de  $R^n$  peut donc s'écrire :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

puisque les vecteurs propres de A forment une base de  $R^n$ .

En multipliant ce vecteur par A, nous obtenons :

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i Ax_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i$$

Si nous répétons cette opération k fois :

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i (\lambda_i)^k x_i \\ &= \lambda_1^k \left[ c_1 x_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right] \end{aligned}$$

Or nous avons  $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$  pour  $i \neq 1$

Donc le terme  $\lambda_1^k c_1 x_1$  devient dominant dès que  $k$  est assez grand. Donc pour  $k$  assez grand, nous avons :

$$x^{(k)} \cong \lambda_1^k c_1 x_1$$

$$x^{(k+1)} \cong \lambda_1^{k+1} c_1 x_1 = \lambda_1 (\lambda_1^k c_1 x_1) \cong \lambda_1 x^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \cong \lambda_1 x^{(k)}$$

en choisissant 2 composantes  $i$ , nous obtenons :

$$\lambda_1 \cong \frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}}$$

- Nous obtenons donc la plus grande valeur propre et son vecteur propre en même temps.
- Dépassement de la capacité de l'ordinateur ?

Pour éviter de dépasser les capacités de l'ordinateur, nous avons intérêt à normaliser les vecteur itérés  $x^k$  à chaque étape ; nous pouvons par exemple ramener à 1 la plus grande composante (en valeur absolue) de  $x^k$ , en appliquant l'algorithme :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Ax^{(0)} & y^1 &= \frac{1}{m_1} x^{(1)} \\ x^{(2)} &= Ay^{(1)} & y^2 &= \frac{1}{m_2} x^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \\ x^{(k)} &= Ay^{(k-1)} & y^k &= \frac{1}{m_k} x^{(k)} \end{aligned}$$

où  $m_k$  est la composante de  $x^k$  de module maximum.

Dans ces conditions, nous avons finalement, pour  $k$  assez grand :

$$y^k \cong y^{k+1} = \frac{1}{m_{k+1}} x^{(k+1)} = \frac{1}{m_{k+1}} Ay^k$$

donc

$$m_{k+1} y^k \cong Ay^k$$

Remarque :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \lambda_1 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y^k = \vec{v}_1$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.07 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.07 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.65 \\ 0.26 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.065 \\ 0.026 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.065 \\ 0.026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.623 \\ 0.286 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0623 \\ 0.0286 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0623 \\ 0.0286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0.6129 \\ 0.2962 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.06129 \\ 0.02962 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 10 \quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/33 \\ 1/33 \end{bmatrix}$$

Remarques :

1. Nous avons :

$$Ax = \lambda x$$

$$A^{-1}A x = A^{-1} \lambda x = \lambda A^{-1} x$$

$$x = \lambda A^{-1} x$$

$$A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$$

Pour obtenir la plus petite valeur propre, nous pouvons donc utiliser la méthode des puissances sur  $A^{-1}$ .

2. Si  $|\lambda_1| \approx |\lambda_2| (\dots |\lambda_{n-1}| \approx |\lambda_n|)$ , alors la convergence sera très

lente car  $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \ll 1$  doit être vrai pour avoir une convergence rapide.

3. Le choix du vecteur initial influence beaucoup la rapidité de la convergence. Si le vecteur initial est près du vecteur propre  $\vec{x}_1$  alors les coefficients  $c_i$ ,  $i \neq 1$ , seront petit par rapport à  $c_1$ .

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = c_1 \lambda_1^k x_1 + c_2 \lambda_2^k x_2 + \dots + c_n \lambda_n^k x_n$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.15 & -1.5 & -1.75 \\ -0.05 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -3.1 \\ 1.2 \end{bmatrix} = -3.1 \begin{bmatrix} -0.0323 \\ 1 \\ -0.3871 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} y^1 = \begin{bmatrix} -0.0032 \\ -0.8274 \\ 0.2113 \end{bmatrix} = -0.8274 \begin{bmatrix} 0.0039 \\ 1 \\ -0.2554 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} y^2 = \begin{bmatrix} 0.004 \\ -1.0525 \\ 0.3083 \end{bmatrix} = -1.0525 \begin{bmatrix} -0.0004 \\ 1 \\ -0.2929 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} y^3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.9875 \\ 0.2803 \end{bmatrix} = -0.9875 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2839 \end{bmatrix}$$

Valeurs exactes :

$$\lambda_3 = -1$$

$$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.2857 \end{bmatrix}$$

# Comment obtenir la deuxième valeurs propres ?

## Méthode de déflation

a. Calculer de  $\lambda_1$  et  $\vec{x}_1$  par la méthode des puissances.

b. Construire  $A^1$  :

$$A^1 = A - \lambda_1 \frac{(\vec{x}_1 \vec{x}_1^T)}{\vec{x}_1^T \vec{x}_1}$$

c. Appliquer à nouveau la méthode des puissances sur  $A^1$

$\lambda_2$  et  $\vec{x}_2$

Remarque :

$A^1$  possède les mêmes  $\lambda_i$  que  $A$  sauf  $\lambda_1 = 0$

En effet :

$$\left( A - \lambda_1 \frac{(\vec{x}_1 \vec{x}_1^T)}{\vec{x}_1^T \vec{x}_1} \right) \vec{x}_1 = A \vec{x}_1 - \lambda_1 \frac{(\vec{x}_1 \vec{x}_1^T)}{\vec{x}_1^T \vec{x}_1} \vec{x}_1 = 0 \vec{x}_1$$

$$\left( A - \lambda_1 \frac{(\vec{x}_1 \vec{x}_1^T)}{\vec{x}_1^T \vec{x}_1} \right)_{i \neq 1} \vec{x}_i = A \vec{x}_i - \lambda_1 \frac{(\vec{x}_1 \vec{x}_1^T)}{\vec{x}_1^T \vec{x}_1} \vec{x}_i = A \vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \frac{10}{1094} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{33} & \frac{1}{33} \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.0457 & -0.6033 & -0.3016 \\ 0.3967 & -3.3066 & -7.0183 \\ -0.3016 & 1.9817 & 5.9909 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8593 \\ -9.6581 \\ 7.6709 \end{bmatrix} = -9.6581 \begin{bmatrix} 0.0890 \\ 1 \\ -0.7942 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} y^1 = \begin{bmatrix} -0.3596 \\ 2.5730 \\ -2.8033 \end{bmatrix} = -2.8033 \begin{bmatrix} 0.1283 \\ -0.9178 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⋮

$$A^{-1} y^k = \begin{bmatrix} 0.3010 \\ -3.9727 \\ 4.0001 \end{bmatrix} = 4.0001 \begin{bmatrix} 0.0752 \\ -0.9931 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4.0001$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.0752 \\ -0.9931 \\ 1 \end{bmatrix}$$