DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 10

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Dérivation numérique

Soit la relation suivante,

$$v(t) = 0.98\frac{di}{dt}(t) + 0.142i(t)$$

et le tableau suivant

t	1.00	1.01	1.02
i	3.10	3.12	3.14

Calculer v au temps $t = 1.00$, $t = 1.01$ et $t = 1.02$ en utilisant la meilleure formule de dérivation utilisant trois points pour approximer di/dt.

Réponse

Nous avons les formules suivantes[1], pour approximer une dérivée en t_0 en utilisant trois points

$$\begin{aligned}
i'(t_0) &= \frac{-i_2 + 4i_1 - 3i_0}{2h} \\
i'(t_0) &= \frac{-3i_0 + 4i_{-1} - i_{-2}}{2h} \\
i'(t_0) &= \frac{i_1 - i_{-1}}{2h}
\end{aligned}$$

On a donc au temps $t = 1.00$, $t = 1.01$ et $t = 1.02$

$$\begin{aligned}
i'(1.00) &= \frac{-i(1.02) + 4i(1.01) - 3i(1.00)}{2 \times 0.01} \\
&= \frac{-3.14 + 4 \times 3.12 - 3 \times 3.10}{0.02} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'(1.01) &= \frac{i(1.02) - i(1.00)}{2 \times 0.01} \\
&= \frac{3.14 - 3.10}{0.02} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i'(1.02) &= \frac{-3i(1.02) + 4i(1.01) - i(1.00)}{2 \times -0.01} \\
&= \frac{-3 \times 3.14 + 4 \times 3.12 - 3.10}{-0.02} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Le calcul de v au temps $t = 1.00$, $t = 1.01$ et $t = 1.02$ est ensuite immédiat et évident.

[1] Cf. Notes de Cours, Chapitre 5, page 8.

II. Intégration numérique : Méthode des trapèzes.

Calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante,

$$\int_0^1 f(x)dx \quad = \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$$

par la méthode des trapèzes, en partageant l'intervalle $[0,1]$ en 10 intervalles égaux. Calculer ensuite la valeur exacte de cette intégrale et sa valeur numérique avec quatre décimales exactes.

Réponse

Les valeurs de la fonction f aux points de subdivisions de l'intervalle $[0,1]$ sont données dans le tableau suivant

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$f(x)$	1.0000	0.9009	0.8065	0.7194	0.6410	0.5714	0.5102	0.4566	0.4098	0.3690	0.3333

La somme des valeurs comprises entre $[0.1, 0.9]$ étant égale à 5.3848, la valeur approchée de l'intégrale par la méthode des trapèze est donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} &= \frac{h}{2}\Big(f(0.0)+2f(0.1)+2f(0.2)+\ldots+2f(0.8)+2f(0.9)+f(1.0)\Big) \\
&= h\Big(\frac{f(0.0)+f(1.0)}{2}+f(0.1)+f(0.2)+\ldots+f(0.8)+f(0.9)\Big) \\
&= \frac{1}{10}\Big(\frac{1+0.3333}{2}+5.3847\Big) \\
&= 0.6051
\end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale de façon analytique, on écrit l'expression $(1+x+x^2)$ sous forme canonique

$$1+x+x^2=(x+\frac{1}{2})^2+1-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)} \\
&= \frac{4}{3}\Big(\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\Big)
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, il vient

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{2}{\sqrt{3}}dx \\
dx &= \frac{\sqrt{3}}{2}dt
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan t]_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Big) \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

la valeur numérique de l'intégrale est donc 0.6045997881 et l'erreur obtenue en faisant le calcul par la méthode des trapèze est égale à $\approx 5.002 \times 10^{-4}$.

III. Intégration numérique : Méthode des trapèzes et de Simpson

On propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

en utilisant 5 intervalles équidistants (ou 6 points).

1. Utiliser les deux premiers paires d'intervalle pour une intégration avec la méthode de Simpson 1/3 et le dernier intervalle avec la méthode d'intégration des trapèzes.
2. Utiliser la première paire d'intervalle pour une intégration avec la méthode de Simpson 1/3 et le dernier triplet d'intervalle pour une intégration par la méthode de Simpson 3/8.
3. Calculer ensuite la valeur exacte de cette intégrale et sa valeur numérique.
4. Indiquez analytiquement et par calcul quelle est la méthode la plus précise.

Réponse

Les points de subdivisions auront donc les abscisses suivantes $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/5$, $x_2 = 2\pi/5$, $x_3 = 3\pi/5$, $x_4 = 4\pi/5$ et $x_5 = \pi$.

1.

L'intégration par la méthode de Simpson 1/3 de $x_0 = 0$ à $x_2 = 2\pi/5$ donne

$$I_1 = \int_0^{x_2} \sin(x)\, dx = (\pi/15) \times \Big(\sin(0) + 4\sin(\pi/5) + \sin(2\pi/5)\Big) \approx 0.6916$$

L'intégration par la méthode de Simpson 1/3 de $x_2 = 2\pi/5$ à $x_4 = 4\pi/5$ donne

$$I_2 = \int_{x_2}^{x_4} \sin(x)\, dx = (\pi/15) \times \Big(\sin(2\pi/5) + 4\sin(3\pi/5) + \sin(4\pi/5)\Big) \approx 1.1191$$

L'intégration par la méthode des trapèzes de $x_4 = 4\pi/5$ à $x_5 = \pi$ donne

$$I_3 = \int_{x_4}^{x_5} \sin(x)\, dx = (\pi/10) \times \Big(\sin(4\pi/5) + \sin(\pi)\Big) \approx 0.1847$$

On obtient donc

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx \approx I_1 + I_2 + I_3 \approx 0.6916 + 1.1190 + 0.1847 \approx 1.9954$$

2.

L'intégration par la méthode de Simpson 1/3 de $x_0 = 0$ à $x_2 = 2\pi/5$ donne

$$I_1 = \int_0^{x_2} \sin(x)\, dx = (\pi/15) \times \Big(\sin(0) + 4\sin(\pi/5) + \sin(2\pi/5)\Big) \approx 0.6916$$

L'intégration par la méthode de Simpson 3/8 de $x_2 = 2\pi/5$ à $x_5 = \pi$ donne

$$I_2 = \int_{x_2}^{x_5} \sin(x)\, dx = (3/8)(\pi/5) \times \Big(\sin(2\pi/5) + 3\sin(3\pi/5) + 3\sin(4\pi/5) + sin(\pi)\Big) \approx 1.3118$$

On obtient donc

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx \approx I_1 + I_2 \approx 0.6916 + 1.3118 \approx 2.0034$$

3.

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

4.

Analytiquement,

L'erreur sur les sections calculées par la méthode de Simpson 1/3 est de $O(h^4)$, l'erreur sur les sections calculées par la méthode des trapèzes est de $O(h^2)$. En combinant les deux (première méthode), l'erreur globale est de l'ordre de $O(h^2)$. l'erreur sur les sections calculées par la méthode de Simpson 1/3 est de $O(h^4)$, l'erreur sur les sections calculées par la méthode de Simpson 3/8 est de $O(h^4)$. En combinant les deux (deuxième méthode), l'erreur globale est de l'ordre de $O(h^4)$. La deuxième méthode est donc plus précise.

Numériquement,

L'erreur engendrée par ces deux méthodes est

$$\begin{aligned} E_1 = 2 - 1.9954 &= 0.0046 \\ E_2 = 2 - 2.0034 &= 0.0034 \end{aligned}$$

Qui confirme que la deuxième méthode est plus précise que la première.

IV. Intégration numérique

Prouvez que pour trois points équidistants, l'intégrale du polynôme de degré deux passant par les trois points et celle de l'unique polynôme de degré trois passant par ces trois mêmes points et un quatrième point équidistant donnent le même résultat.

Réponse

Soit l'abscisse de ces trois points, x_0, x_1, x_2. Un polynôme de degré deux passant par ces trois points est unique et son intégrale s'écrit avec le changement de variable $s = (x - x_0)/h$,

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = h\int_0^2 P_2(s)ds = \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + f_2\Big)$$

On veut montrer que

$$h\int_0^2 P_2(s)ds = h\int_0^2 P_3(s)ds = \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + f_2\Big)$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
h\int_0^2 P_3(s)\,ds &= h\int_0^2 \Big(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0\Big)\,ds \\
&= hf_0\int_0^2 ds + h\Delta f_0\int_0^2 s\,ds + \frac{h\Delta^2 f_0}{2}\int_0^2 s(s-1)\,ds + \frac{h\Delta^3 f_0}{6}\int_0^2 s(s-1)(s-2)\,ds \\
&= hf_0[s]_0^2 + h\Delta f_0[\frac{s^2}{2}]_0^2 + \frac{h\Delta^2 f_0}{2}[\frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}]_0^2 + \frac{h\Delta^3 f_0}{6}[\frac{s^4}{4} - s^3 + s^2]_0^2 \\
&= 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h\Delta^2 f_0}{3}
\end{aligned}$$

Or, par définition, $\Delta f_0 = f_1 - f_0$, et $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}
h\int_0^2 P_3(s)\,ds &= 2hf_1 + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0) \\
&= \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + f_2\Big) \\
&= h\int_0^2 P_2(s)\,ds \\
&= \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx
\end{aligned}$$