DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 11

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Intégration numérique : méthode des coefficients indéterminés

Calculer une valeur exacte de l'intégrale suivante,

$$\int_0^2 f(x)dx \quad = \quad \int_0^2 x^3 dx.$$

par la méthode des coefficient indéterminés[1] avec $n = 2$ termes. Verifier que la méthode analytique traditionnelle donne le même résultat.

II. Intégration numérique : méthode des quadratures gaussiennes (1)

Calculer une valeur exacte de l'intégrale suivante,

$$\int_0^2 f(x)dx \quad = \quad \int_0^2 x^3\, dx.$$

par la méthode des quadratures gaussiennes[2] avec $n = 2$ termes.

III. Intégration numérique : méthode des quadratures gaussiennes (2)

Calculer une valeur approximative de l'intégrale suivante,

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx,$$

par la méthode des quadratures gaussiennes avec $n = 2$.

IV. Extrapolation de Richardson

Soit M une valeur inconnue et $N(h)$ une approximation de cette valeur d'ordre $O(h^2)$.

1. Exprimer la signification de cette approximation.
2. Exprimer cette même approximation en fonction du terme d'erreur d'ordre $O(h^3)$ et du terme Kh^2 ou K est une constante indéterminée.
3. Exprimer cette dernière approximation pour un pas de largeur $2h$.
4. Eliminer K dans les deux dernières approximations et trouver une nouvelle approximation pour M avec un terme d'erreur d'ordre $O(h^3)$.
5. En déduire finalement la formule d'extrapolation de Richardson.

[1] Cf. Notes de Cours, Chapitre 5, page 51.
[2] Cf. Notes de Cours, Chapitre 5, page 41.

V. Méthode des séries de Taylor

Utiliser la méthode des séries de Taylor au premier ordre pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = y(t)\cos t,$$

avec $y(0) = 1$.

1. Montrer que la solution de cette équation différentielle est $y(t) = \exp(\sin t)$.
2. Trouver la relation itérative de résolution de cette équation par la méthode des séries de Taylor au second ordre.
3. Utiliser un pas de $h = 0.1$ et donner $y(0.1)$, calculer l'erreur commise.
4. Utiliser un pas de $h = 0.01$ et donner $y(0.01)$, calculer l'erreur commise.

VI. Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Utiliser la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = -y(t) + t + 1, \tag{1}$$

avec $y(0) = 1$. Le pas est fixé à $h = 0.1$. Calculer juste la valeur de $y(0.1)$.