DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N^o 11

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Intégration numérique : méthode des coefficients indéterminés

Calculer une valeur exacte de l'intégrale suivante,

$$\int_0^2 f(x)dx \quad = \quad \int_0^2 x^3 dx \tag{1}$$

par la méthode des coefficient indéterminés[1] avec $n = 2$ termes. Verifier que la méthode analytique traditionnelle donne le même résultat.

Réponse

Pour ramener l'integrale (1) dans l'intervalle [-1, +1], on doit faire un changement de variable en posant :

$$x = t + 1$$

On a donc, $dx = dt$, et on obtient,

$$\int_0^2 x^3 dx = \int_{-1}^1 (t+1)^3 dt$$

Pour résoudre cette équation, on doit estimer a, b, c, tel que,

$$\int_{-1}^1 (t+1)^3 dt = ag(-1) + bg(0) + cg(1)$$

On impose les polynômes de base x^j avec $j = 0,\ 1,\ 2$, c'est à dire les polynômes de base de la forme $1,\ x\ , x^2$ et on calcule ces coefficients en établissant les trois relations suivantes.

Lorsque $g(x) = 1$, on a $g(-1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(1) = 1$ et donc,

$$\int_{-1}^1 1\, dx = [x]_{-1}^1 = 2 = a(1) + b(1) + c(1) = 2$$

Lorsque $g(x) = x$, on a $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ et donc,

$$\int_{-1}^1 x\, dx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^1 = 0 = a(-1) + b(0) + c(1) = -a + c = 0$$

Lorsque $g(x) = x^2$, on a $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ et donc,

$$\int_{-1}^1 x^2\, dx = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^1 = \frac{2}{3} = a(1) + b(0) + c(1) = a + c = 2/3$$

Donc on doit résoudre le système de trois équations à trois inconnus suivant,

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} a & +b & +c & = & 2 \\ -a & & +c & = & 0 \\ a & & +c & = & \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

[1]Cf. Notes de Cours, Chapitre 5, page 51.

et on trouve $a = 1/3$, $b = 4/3$, $c = 1/3$, et donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 x^3 dx \\
&= \int_{-1}^1 (t+1)^3 dt \\
&= (1/3)g(-1) + (4/3)g(0) + (1/3)g(1) \\
&= (1/3)(-1+1)^3 + (4/3)(0+1)^3 + (1/3)(1+1)^3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Par la méthode analytique traditionnelle, on trouve,

$$\int_0^2 x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_0^2 = 4$$

On trouve le même résultat.

II. Intégration numérique : méthode des quadratures Gaussiennes

Calculer une valeur exacte de l'intégrale suivante,

$$\int_0^2 f(x)dx \quad = \quad \int_0^2 x^3\, dx$$

par la méthode des quadratures gaussiennes[2] avec $n = 2$ termes.

Réponse

Pour ramener l'intégration d'une intégrale $\int_a^b$ entre -1 et 1, (i.e., $\int_{-1}^1$), on doit faire le changement de variable suivant,

$$x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2} = \frac{2t+2}{2} = t+1$$

On a donc, $dx = \frac{(b-a)}{2}\, dt$, et on obtient,

$$\int_0^2 x^3\, dx = \int_{-1}^1 (t+1)^3\, dt = w_1(t_1+1)^3 + w_2(t_2+1)^3$$

où t_1 et t_2 sont les racines du polynôme de legendre de degré deux, i.e., $t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ et $t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On doit chercher maintenant les coefficient w_1 et w_2. Ces derniers sont donnés par (ou alors ces données sont récupérées à partir d'ine table)

$$w_i = \int_{-1}^1 L_i(t)\, dt$$

[2]Cf. Notes de Cours, Chapitre 5, page 41.

où les $L_i(t)$ sont les polynôme de base de lagrange pour t_1 et t_2. Par définition, on a

$$L_i(t) = \Pi_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{t-t_j}{t_i-t_j}$$

Dans notre cas, on trouve les deux polynôme de Lagrange suivant

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \frac{t-t_2}{t_1-t_2} = \frac{t-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1) \\ L_2(t) &= \frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{t+\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1) \end{aligned}$$

Et donc, les coefficient w sont donnés par

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^{1} L_1(t)dt = \int_{-1}^{1} -\frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1)\,dt = -\frac{1}{2}[\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-t]_{-1}^{1} = 1 \\ w_2 &= \int_{-1}^{1} L_2(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1)\,dt = \frac{1}{2}[\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-t]_{-1}^{1} = 1 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^3dx &= \int_{-1}^{1}(t+1)^3\,dt \\ &= w_1(t_1+1)^3 + w_2(t_2+1)^3 \\ &= (t_1+1)^3 + (t_2+1)^3 \\ &= (\frac{-\sqrt{3}}{3}+1)^3 + (\frac{\sqrt{3}}{3}+1)^3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

III. Intégration numérique : méthode des quadratures Gaussiennes

Calculer une valeur approximative de l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$$

par la méthode des quadratures gaussiennes avec $n = 2$ termes.

Réponse

On fait le changement de variable $x = \frac{(b-a)t+(a+b)}{2} = \frac{(\pi/2)t+\pi/2}{2}$. On trouve $dx = (\pi/4)\,dt$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx &= \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} \sin\Big(\frac{\pi t+\pi}{4}\Big)\,dt \\
&\approx \frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi t_1+\pi}{4}\Big) + \frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi t_2+\pi}{4}\Big) \\
&\approx \frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi(\frac{-\sqrt{3}}{3})+\pi}{4}\Big) + \frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi(\frac{\sqrt{3}}{3})+\pi}{4}\Big) \\
&\approx \frac{\pi}{4}\Big(\sin(0.10566\pi) + \sin(0.39434\pi)\Big) \\
&\approx 1.00
\end{aligned}$$

IV. Extrapolation de Richardson

Soit M une valeur inconnue et $N(h)$ une approximation de cette valeur d'ordre $O(h^2)$.

1. Exprimer la signification de cette approximation.
2. Exprimer cette même approximation en fonction du terme d'erreur d'ordre $O(h^3)$ et du terme Kh^2 ou K est une constante indéterminée.
3. Exprimer cette dernière approximation pour un pas de largeur $2h$.
4. Eliminer K dans les deux dernières approximations et trouver une nouvelle approximation pour M avec un terme d'erreur d'ordre $O(h^3)$.
5. En déduire finalement la formule d'extrapolation de Richardson.

Réponse

1. On peut écrire M de la facon suivante
$$M = N(h) + O(h^2)$$
2. De même, avec un terme d'erreur d'ordre $O(h^3)$, cette expression peut s'écrire, avec K, une constante indéterminée,
$$M = N(h) + Kh^2 + O(h^3) \tag{2}$$
3. Si on remplace h par $2h$ dans cette expression, on trouve
$$M = N(2h) + 4Kh^2 + O((2h)^3) \tag{3}$$
4. En éliminant K dans les équations (2) et (3), on trouve
$$\begin{aligned}
3M &= 4N(h) - N(2h) + O(h^3) \\
M &= N(h) + \frac{1}{2^2-1}\Big(N(h) - N(2h)\Big) + O(h^3)
\end{aligned}$$
5. On retrouve dans la derniere expression, la formule d'extrapolation de Richardson.

V. Méthode des séries de Taylor

Utiliser la méthode des séries de Taylor au premier ordre pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = y(t)\cos t$$

avec $y(0) = 1$.

1. Montrer que la solution de cette équation différentielle est $y(t) = \exp(\sin t)$.
2. Trouver la relation itérative de résolution de cette équation par la méthode des séries de Taylor au second ordre.
3. Utiliser un pas de $h = 0.1$ et donner $y(0.1)$, calculer l'erreur commise.
4. Utiliser un pas de $h = 0.01$ et donner $y(0.01)$, calculer l'erreur commise.

Réponse

1.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= y(t)\cos(t) \\
\frac{dy}{y(t)} &= \cos(t)\ dt \\
\int \frac{dy}{y(t)} &= \int \cos(t)\ dt \\
\ln|y(t)| &= \sin(t) + C^{st} \\
|y(t)| &= C^{st}\exp(\sin(t)) \\
y(t) &= C^{st}\exp(\sin(t))
\end{aligned}$$

On a $y(0) = 1$, donc $C^{st} = 1$, et $y(t) = \exp(\sin(t))$.

2.
La dérivée de $y'(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
y''(t) &= (y(t)\cos(t))' \\
&= y'(t)\cos(t) - y(t)\sin(t) \\
&= y(t)\cos^2(t) - y(t)\sin(t)
\end{aligned}$$

On obtient donc l'approche itérative suivante

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h\big(y(t_i)\cos(t_i)\big) + \frac{h^2}{2}\big(y(t_i)\cos^2(t_i) - y(t_i)\sin(t_i)\big)$$

3.
Pour $h = 0.1$

$$y(0.1) = y(0) + 0.1\big(y(0)\cos 0\big) + \big((0.01/2)(y(0)\cos^2 0 - y(0)\sin 0\big) \approx 1.105$$

et l'erreur est de $e \approx 1.31\ 10^{-5}$ car la vraie solution est $y(0.1) = \exp(\sin(0.1)) \approx 1.10498683$.

4.
Pour $h = 0.01$

$$y(0.01) = y(0) + 0.01\big(y(0)\cos 0\big) + \big((0.0001/2)(y(0)\cos^2 0 - y(0)\sin 0\big) \approx 1.01005$$

et l'erreur est de $e \approx 10^{-9}$ car la vraie solution est $y(0.01) = \exp(\sin 0.01) \approx 1.010049999$.

VI. Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Utiliser la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = -y(t) + t + 1 \tag{4}$$

avec $y(0) = 1$. Le pas est fixé à $h = 0.1$. Calculer la valeur de $y(0.1)$. [3]

Réponse

On va calculer les coefficients k_1, k_2, k_3, k_4.

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.1 f(t_0, y_0) \\ &= 0.1 f(0, 1) \\ &= 0.1(-1 + 0 + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 0.1 f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) \\ &= 0.1 f(0.05, 1) \\ &= 0.1(-1 + 0.05 + 1) \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

[3]Note : La vraie solution d'une équation du type

$$y'(t) + P(t)y(t) = Q(t)$$

est donnée par la solution suivante

$$y(t) = \rho(t)^{-1}\ \exp\Big(\int \rho(t)Q(t)\Big)$$

avec $\rho(t) = \exp \int P(t)\, dt$.

Dans notre cas, on a $P(t) = 1$ et $Q(t) = t + 1$, et donc $\rho(t) = \int \exp(t) = \exp(t)$. La solution de l'équation (4) est donc (en intégrant par partie)

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-t)\Big(\int (t+1)\exp(t)\, dt\Big) \\ y(t) &= \exp(-t)\Big(t\exp(t) - (\int \exp(t)\, dt) + \exp(t) + C^{st}\Big) \\ y(t) &= t + C^{st}\exp(-t) \end{aligned}$$

Or $y(0) = 1$, donc $C^{st} = 1$. La solution est donc $y = t + \exp(-t)$.

$$
\begin{aligned}
k_3 &= 0.1f(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) \\
&= 0.1f(0.05, 1.0025) \\
&= 0.1(-1.0025 + 0.05 + 1) \\
&= 0.00475
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= 0.1f(t_0 + h, y_0 + k_3) \\
&= 0.1f(0.1, 1.00475) \\
&= 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1) \\
&= 0.009525
\end{aligned}
$$

Et on trouve,

$$
y(0.1) = y_1 = 1 + \frac{1}{6}0 + \frac{1}{3}0.005 + \frac{1}{3}(0.00475) + \frac{1}{6}0.009525 \approx 1.0048375
$$

La vraie valeur est $y(0.1) = 1.0048374180$.