DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 12

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthode d'Adams-Moulton d'ordre local en h^4

Utiliser la méthode d'Adams-Moulton[1] d'ordre local 4, pour $h = 0.1$, pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = -y(t) + t^2 + 1,$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} y_0 = y(0.0) &= 1 \\ y_1 = y(0.1) &= 1.0003252 \\ y_2 = y(0.2) &= 1.0025385 \end{aligned}$$

Calculer $y_3 = y(0.3)$.

Réponse

Posons $y'(t) = f(t, y)$ avec $f(t, y) = -y(t) + t^2 + 1$ et les relations itératives suivantes

PRÉDICTION,

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big(23f(t_n, y_n) - 16f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y_{n-2})\Big)$$

$$\tilde{f}_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

CORRECTION,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big(5\tilde{f}_{n+1} + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\Big)$$

D'abord, la prédiction

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\Big(23f(t_2, y_2) - 16f(t_1, y_1) + 5f(t_0, y_0)\Big) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12}\Big(23f(0.2, 1.0025385) - 16f(0.1, 1.0003252) + 5f(0.0, 1)\Big) \\ &= 1.008428648 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 &= f(0.3, \tilde{y}_3) \\ &= -1.008428648 + (0.3)^2 + 1 \\ &= 0.081571352 \end{aligned}$$

Ensuite, la correction

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\Big(5\tilde{f}_3 + 8f(t_2, y_2) - f(t_1, y_1\Big) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12}\Big(5(0.081571352) + 8(0.0374615) - (0.0096748)\Big) \\ &\approx 1.00835 \end{aligned}$$

[1] Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 22.

II. Equation différentielle d'ordre supérieur (ordre 2)

Utiliser la méthode de Runge Kutta[2] d'ordre local 4, avec $h = 0.1$, pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) \quad = \quad \exp(2t)\sin(t)$$

avec les conditions initiales suivantes, $y(0) = -0.4$ et $y'(0) = -0.6$. Calculer $y(0.1) = y_1$.

Réponse

Posons

$$\begin{aligned} x(t) &= y'(t) \\ x'(t) &= y''(t) \end{aligned}$$

On trouve donc le système d'ordre un suivant

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - 2y(t) + \exp(2t)\sin(t) = f_1(t, y, x) \\ y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} y(0) &= -0.4 \\ \text{et} \quad x(0) &= -0.6 \end{aligned}$$

Notons $K_{x,y}$, les différents coefficients pondérateurs de la méthode de Runge Kutta. L'indice y est associé à la fonction f_1 ou f_2.

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= hf_1(t_0, y_0, x_0) \\ &= 0.1(2(-0.6) - 2(-0.4) + 0.0) \\ &= -0.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= hf_2(t_0, y_0, x_0) \\ &= 0.1(-0.6) \\ &= -0.06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2,1} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\ &= 0.1f_1(0.05, -0.43, -0.62) \\ &= 0.1(2(-0.62) - 2(-0.43) + \exp(0.1)\sin(0.05)) \\ &= -0.03247644757 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\ &= 0.1f_2(0.05, -0.43, -0.62) \\ &= 0.1(-0.62) \\ &= -0.062 \end{aligned}$$

[2]Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 28.

$$
\begin{aligned}
K_{3,1} &= hf_1(t_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_{2,2}, x_0+\frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_1(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(2(-0.616238) - 2(-0.431) + \exp(0.1)\sin(0.05) \\
&= -0.03152409
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{3,2} &= hf_2(t_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_{2,2}, x_0+\frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_2(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(-0.616238) \\
&= -0.0616238
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{4,1} &= hf_1(t_0+h, y_0+k_{3,2}, x_0+k_{3,1}) \\
&= 0.1f_1(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= 0.1(2(-0.63152409)) - 2(-0.4616238) + \exp(0.2)\sin(0.1) \\
&= -0.02178637
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{4,2} &= hf_2(t_0+h, y_0+k_{3,2}, x_0+k_{3,1}) \\
&= 0.1f_2(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= -0.063152409
\end{aligned}
$$

Donc, on trouve,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0+\frac{1}{6}k_{1,1}+\frac{1}{3}k_{2,1}+\frac{1}{3}k_{3,1}+\frac{1}{6}k_{4,1} \\
&= -0.6+\frac{1}{6}(-0.04)+\frac{1}{3}(-0.03247644)+\frac{1}{3}(-0.03152409)+\frac{1}{6}(-0.02178637) \\
&= -0.631631
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0+\frac{1}{6}k_{1,2}+\frac{1}{3}k_{2,2}+\frac{1}{3}k_{3,2}+\frac{1}{6}k_{4,2} \\
&= -0.4+\frac{1}{6}(-0.06)+\frac{1}{3}(-0.062)+\frac{1}{3}(-0.0616238)+\frac{1}{6}(-0.063) \\
&= -0.461733
\end{aligned}
$$

Donc $y_1 = -0.461733$.

III. Méthode de tir

Soit l'équation différentielle suivante,

$$
y''(t) = -\frac{2}{t}y'(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln t)}{t^2} \tag{1}
$$

avec les conditions frontières suivantes

$$y(1) = 1$$
$$y(2) = 2$$

avec $1 \leq t \leq 2$. Résoudre l'équation (1) avec la méthode d'Euler-Modifiée avec le pas $h = 0.1$.

Réponse

On va transformer ce problème de condition frontière en deux problèmes de conditions initiales. Essayons de résoudre avec les conditions initiales suivantes, (pour alléger la notation, on notera x au lieu de $x(t)$ et idem pour y).

$$\begin{array}{rl} & y(1) = 1 \\ \text{on pose dans le premier tir} & y'(1) = 0 \end{array}$$

Posons $x(t) = y'(t)$, Nous devons résoudre le système suivant,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{2}{t}x(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln(t))}{t^2} = f_1(t, y, x) \\ y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $y(1) = 1$ et $x(1) = y'(1) = 0$.

On utilise les équations itératives de la procédure d'Euler-Modifiée.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf_2(t_j, y_j, x_j) \\ \tilde{x}_{j+1} &= x_j + hf_1(t_j, y_j, x_j) \\ \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\Big(f_2(t_j, y_j, x_j) + f_2(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\Big) \\ \\ x_{j+1} &= x_j + \frac{h}{2}\Big(f_1(t_j, y_j, x_j) + f_1(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\Big) \end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_0 + 0.1f_1(1, 1, 0) = 0 + 0.1(2) = 0.2 \\ \tilde{y}_1 &= y_0 + 0.1f_2(1, 1, 0) = 1 + 0 = 1 \\ \\ x_1 &= 0 + \frac{0.1}{2}\Big(f_1(1, 1, 0) + f_1(1.1, 1, 0.2)\Big) = 0.168 \\ y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_2(1, 1, 0) + f_2(1.1, 1, 0.2)\Big) = 1.01 \\ &\vdots \\ x_{10} &= 0.682334 \\ y_{10} &= 1.46675 \end{aligned}$$

Or on a $y_{10} = y(2) = 2$, donc on a raté le tir. Essayons maintenant avec les conditions initiales $y(1) = 1$ et $x(1) = 1$ et on posera pour le deuxième tir, $y'(1) = 1$.

On obtient,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= 1 + 0.1 f_1(1,1,1) = 0 \\
\tilde{y}_1 &= 1 + 0.1 f_2(1,1,1) = 1 + 0.1 = 1.1 \\
\\
x_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_1(1,1,1) + f_1(1.1,1.1,0)\Big) = 1.00393 \\
y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_2(1,1,0) + f_2(1.1,1.1,0)\Big) = 1.1 \\
&\ \vdots \\
x_{10} &= 1.09941 \\
y_{10} &= 2.04757
\end{aligned}$$

Or on a $y_{10} = y(2) = 2$, donc on a encore raté le tir. Cependant, si $u(t)$ et $v(t)$ sont solutions de l'équation différentielle (1), alors $w(t) = \alpha u(t) + (1-\alpha)v(t)$ sera aussi une solution de cette équation différentielle [3]. On considére donc la fonction associée au premier essai comme étant $u(t)$ et la deuxième comme étant $v(t)$, nous devons déterminer α pour que,

$$y(2) = w(2) = 2$$

On a

$$\begin{aligned}
w(2) &= \alpha(1.46675) + (1-\alpha)(2.04757) = 2 \\
\text{d'où} \qquad \alpha &= 0.0819014
\end{aligned}$$

Donc, $w(t) = 0.0819014\, u(t) + (1 - 0.0819014)\, v(t)$ est aussi solution de l'équation différentielle (1) et donc nous avons la relation suivante $w'(t) = 0.0819014\, u'(t) + (1 - 0.0819014)\, v'(t)$, i.e., $w'(t) = 0.0819014\, u'(t) + 0.918099\, v'(t)$, et donc

$$\begin{aligned}
w'(1) &= 0.0819014\, u'(1) + 0.918099 v'(1) \\
w'(1) &= 0 + (0.918099)(1) \\
w'(1) &= 0.918099
\end{aligned}$$

Donc il faut prendre $y'(1) = 0.918099$.

IV. Méthode de Gershgörin, des puissances

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Tracer les disques de Gershgörin et déterminer par cette méthode les intervalles où doivent se trouver les valeurs propres de cette matrice.

[3] Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 36.

2. En supposant qu'il n'existe pas de valeurs propres complexes, donner l'intervalle où doivent se trouver ces valeurs propres.
3. En utilisant ces disques de Gershgörin, donner une borne supérieure pour la plus grande valeur propre de cette matrice. En utilisant le corollaire 3 [4] , essayer de trouver une borne supérieure plus intéressante.
4. Déterminer en partant du vecteur $x^{[0]} = (1\ 2\ 3)^t$, la plus grande valeur propre de la matrice par la méthode des puissances (faites seulement cinq itérations).

Réponse

1. On trouve un disque C_1 de centre $(5\ 0)^t$ et de rayon $r = 4$, un disque C_2 de centre $(2\ 0)^t$ et de rayon $r = 3$ et finalement un disque C_3 de centre $(2\ 0)^t$ et de rayon $r = 3$. Puisque la matrice est symétrique, les disques de Gershgorin construit à partir de la matrice transposée A^t sont identiques.

Les valeurs propres de cette matrice sont, puisque $C_2 = C_3$, éléments de l'union des disques $C_1 \bigcup C_2$.

2. Dans l'hypothèse ou il n'y a pas de valeurs propres complexes, ce qui est n'est pas une hypothèse mais une réalité puisque la matrice est symétrique, celles-ci sont comprises dans l'intervalle $[-1, 9]$.

3. En utilisant les disques de Gershgörin, la borne supérieure pour la plus grande valeur propre de cette matrice est donc 9. En utilisant le corollaire 3. cette borne supérieure est donnée par $\min\{\max(9,5,5), \max(9,5,5)\} = 9$. On obtient donc le même résultat car la matrice A est symétrique.

4. On a successivement

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu^{[1]} = 3$$

Les composantes des vecteurs $y^{[n]}$ et les valeurs de $\mu^{[n]}$ (la plus grande valeur propre de A) pour chaque itération sont données dans le tableau ci dessous. La valeur de $\mu^{[n]}$ à l'itération $n = 5$ semble être une bonne estimée de la valeur propre dominante.

n	Composantes de $y^{[n]}$			$\mu^{[n]}$
1	1.00	1.00	0.667	3.00
2	1.00	0.587	-0.295	5.67
3	1.00	0.513	-0.470	6.76
4	1.00	0.502	-0.495	6.97
5	1.00	0.501	-0.499	6.99

Par cette méthode, on trouve que la plus grande valeur propre de cette matrice est égale à 6.99 et que le vecteur propre associé est égale à $(1.00 \quad 0.501 \quad -0.499)^t$.

Les valeurs propres exactes sont $1, 1, 7$ et le vecteur propre associé à $\lambda = 7$ à pour composantes $(1.00\ \ 0.5\ \ -0.5)^t$.

[4] Cf. Notes de Cours, Chapitre 7, page 8.