DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 12

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 6	**Résolution des équations différentielles**
I	Méthode d'Adams-Moulton d'ordre local en h^4.
II	Equation différentielle d'ordre supérieur (ordre 2).
III	Méthode de tir.
Chapitre 7	**Valeurs et vecteurs propres**
IV	Méthode de Gershgorin et des puissances.

I. Méthode d'Adams-Moulton d'ordre local en h^4

Utiliser la méthode d'Adams-Moulton [1] d'ordre local 4, pour $h = 0.1$, pour résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = -y(t) + t^2 + 1,$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} y_0 = y(0.0) &= 1 \\ y_1 = y(0.1) &= 1.0003252 \\ y_2 = y(0.2) &= 1.0025385 \end{aligned}$$

Calculer $y_3 = y(0.3)$.

Réponse

Posons $y'(t) = f(t, y)$ avec $f(t, y) = -y(t) + t^2 + 1$ et les relations itératives suivantes

Prédiction,

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big(23f(t_n, y_n) - 16f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, y_{n-2})\Big)$$

$$\tilde{f}_{n+1} = f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})$$

Correction,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big(5\tilde{f}_{n+1} + 8f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\Big)$$

D'abord, la prédiction

$$\begin{aligned} \tilde{y}_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\Big(23f(t_2, y_2) - 16f(t_1, y_1) + 5f(t_0, y_0)\Big) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12}\Big(23f(0.2, 1.0025385) - 16f(0.1, 1.0003252) + 5f(0.0, 1)\Big) \\ &= 1.008428648 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 &= f(0.3, \tilde{y}_3) \\ &= -1.008428648 + (0.3)^2 + 1 \\ &= 0.081571352 \end{aligned}$$

Ensuite, la correction

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + \frac{h}{12}\Big(5\tilde{f}_3 + 8f(t_2, y_2) - f(t_1, y_1\Big) \\ &= 1.0025385 + \frac{0.1}{12}\Big(5(0.081571352) + 8(0.0374615) - (0.0096748)\Big) \\ &\approx 1.00835 \end{aligned}$$

1. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 22.

II. Equation différentielle d'ordre supérieur (ordre 2)

Utiliser la méthode de Runge Kutta [2] d'ordre local 4, avec $h = 0.1$, pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 suivante

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) \quad = \quad \exp(2t)\sin(t)$$

avec les conditions initiales suivantes, $y(0) = -0.4$ et $y'(0) = -0.6$. Calculer $y(0.1) = y_1$.

Réponse

Posons

$$\begin{aligned} x(t) &= y'(t) \\ x'(t) &= y''(t) \end{aligned}$$

On trouve donc le système d'ordre un suivant

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) - 2y(t) + \exp(2t)\sin(t) = f_1(t, y, x) \\ y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} y(0) &= -0.4 \\ \text{et} \quad x(0) &= -0.6 \end{aligned}$$

Notons $K_{x,y}$, les différents coefficients pondérateurs de la méthode de Runge Kutta. L'indice y est associé à la fonction f_1 ou f_2.

$$\begin{aligned} K_{1,1} &= hf_1(t_0, y_0, x_0) \\ &= 0.1(2(-0.6) - 2(-0.4) + 0.0) \\ &= -0.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= hf_2(t_0, y_0, x_0) \\ &= 0.1(-0.6) \\ &= -0.06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2,1} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\ &= 0.1f_1(0.05, -0.43, -0.62) \\ &= 0.1(2(-0.62) - 2(-0.43) + \exp(0.1)\sin(0.05)) \\ &= -0.03247644757 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2,2} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{1,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{1,1}) \\ &= 0.1f_2(0.05, -0.43, -0.62) \\ &= 0.1(-0.62) \\ &= -0.062 \end{aligned}$$

2. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 28.

$$
\begin{aligned}
K_{3,1} &= hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{2,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_1(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(2(-0.616238) - 2(-0.431) + \exp(0.1)\sin(0.05) \\
&= -0.03152409
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{3,2} &= hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_{2,2}, x_0 + \frac{1}{2}k_{2,1}) \\
&= 0.1f_2(0.05, -0.431, -0.616238) \\
&= 0.1(-0.616238) \\
&= -0.0616238
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{4,1} &= hf_1(t_0 + h, y_0 + k_{3,2}, x_0 + k_{3,1}) \\
&= 0.1f_1(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= 0.1(2(-0.63152409)) - 2(-0.4616238) + \exp(0.2)\sin(0.1) \\
&= -0.02178637
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_{4,2} &= hf_2(t_0 + h, y_0 + k_{3,2}, x_0 + k_{3,1}) \\
&= 0.1f_2(0.1, -0.4616238, -0.63152409) \\
&= -0.063152409
\end{aligned}
$$

Donc, on trouve,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}k_{1,1} + \frac{1}{3}k_{2,1} + \frac{1}{3}k_{3,1} + \frac{1}{6}k_{4,1} \\
&= -0.6 + \frac{1}{6}(-0.04) + \frac{1}{3}(-0.03247644) + \frac{1}{3}(-0.03152409) + \frac{1}{6}(-0.02178637) \\
&= -0.631631
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}k_{1,2} + \frac{1}{3}k_{2,2} + \frac{1}{3}k_{3,2} + \frac{1}{6}k_{4,2} \\
&= -0.4 + \frac{1}{6}(-0.06) + \frac{1}{3}(-0.062) + \frac{1}{3}(-0.0616238) + \frac{1}{6}(-0.063) \\
&= -0.461733
\end{aligned}
$$

Donc $y_1 = -0.461733$.

III. Méthode de tir

Soit l'équation différentielle suivante,

$$
y''(t) = -\frac{2}{t}y'(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln t)}{t^2} \tag{1}
$$

avec les conditions frontières suivantes

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y(2) &= 2 \end{aligned}$$

avec $1 \leq t \leq 2$. Résoudre l'équation (1) avec la méthode d'Euler-Modifiée avec le pas $h = 0.1$.

Réponse

On va transformer ce problème de condition frontière en deux problèmes de conditions initiales. Essayons de résoudre avec les conditions initiales suivantes, (pour alléger la notation, on notera x au lieu de $x(t)$ et idem pour y).

$$\text{on pose dans le premier tir} \qquad \begin{aligned} y(1) &= 1 \\ y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Posons $x(t) = y'(t)$, Nous devons résoudre le système suivant,

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{2}{t}x(t) + \frac{2}{t^2}y(t) + \frac{\sin(\ln(t))}{t^2} = f_1(t, y, x) \\ y'(t) &= x(t) = f_2(t, y, x) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $y(1) = 1$ et $x(1) = y'(1) = 0$.

On utilise les équations itératives de la procédure d'Euler-Modifiée.

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{j+1} &= y_j + hf_2(t_j, y_j, x_j) \\ \tilde{x}_{j+1} &= x_j + hf_1(t_j, y_j, x_j) \\ \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}\Big(f_2(t_j, y_j, x_j) + f_2(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\Big) \\ \\ x_{j+1} &= x_j + \frac{h}{2}\Big(f_1(t_j, y_j, x_j) + f_1(t_{j+1}, \tilde{y}_{j+1}, \tilde{x}_{j+1})\Big) \end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_0 + 0.1f_1(1, 1, 0) = 0 + 0.1(2) = 0.2 \\ \tilde{y}_1 &= y_0 + 0.1f_2(1, 1, 0) = 1 + 0 = 1 \\ \\ x_1 &= 0 + \frac{0.1}{2}\Big(f_1(1, 1, 0) + f_1(1.1, 1, 0.2)\Big) = 0.168 \\ y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_2(1, 1, 0) + f_2(1.1, 1, 0.2)\Big) = 1.01 \\ &\vdots \\ x_{10} &= 0.682334 \\ y_{10} &= 1.46675 \end{aligned}$$

Or on a $y_{10} = y(2) = 2$, donc on a raté le tir. Essayons maintenant avec les conditions initiales $y(1) = 1$ et $x(1) = 1$ et on posera pour le deuxième tir, $y'(1) = 1$.

On obtient,

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= 1 + 0.1 f_1(1,1,1) = 0 \\
\tilde{y}_1 &= 1 + 0.1 f_2(1,1,1) = 1 + 0.1 = 1.1 \\
\\
x_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_1(1,1,1) + f_1(1.1,1.1,0)\Big) = 1.00393 \\
y_1 &= 1 + \frac{0.1}{2}\Big(f_2(1,1,0) + f_2(1.1,1.1,0)\Big) = 1.1 \\
&\vdots \\
x_{10} &= 1.09941 \\
y_{10} &= 2.04757
\end{aligned}
$$

Or on a $y_{10} = y(2) = 2$, donc on a encore raté le tir. Cependant, si $u(t)$ et $v(t)$ sont solutions de l'équation différentielle (1), alors $w(t) = \alpha u(t) + (1-\alpha)v(t)$ sera aussi une solution de cette équation différentielle [3]. On considére donc la fonction associée au premier essai comme étant $u(t)$ et la deuxième comme étant $v(t)$, nous devons déterminer α pour que,

$$y(2) = w(2) = 2$$

On a

$$
\begin{aligned}
w(2) &= \alpha(1.46675) + (1-\alpha)(2.04757) = 2 \\
\text{d'où} \qquad \alpha &= 0.0819014
\end{aligned}
$$

Donc, $w(t) = 0.0819014\, u(t) + (1 - 0.0819014)\, v(t)$ est aussi solution de l'équation différentielle (1) et donc nous avons la relation suivante $w'(t) = 0.0819014\, u'(t) + (1 - 0.0819014)\, v'(t)$, i.e., $w'(t) = 0.0819014\, u'(t) + 0.918099\, v'(t)$, et donc

$$
\begin{aligned}
w'(1) &= 0.0819014\, u'(1) + 0.918099 v'(1) \\
w'(1) &= 0 + (0.918099)(1) \\
w'(1) &= 0.918099
\end{aligned}
$$

Donc il faut prendre $y'(1) = 0.918099$.

3. Cf. Notes de Cours, Chapitre 6, page 36.