DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 2

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 2	**Solution d'équation**
I	Méthode du point fixe.
II	Méthode de Newton.
Chapitre 3	**Résolution de système d'équations linéaires**
III	Méthode de Cramer.
IV	Eliminiation de Gauss sans pivotage.
V	Elimination de Gauss avec pivotage.

I. Méthode du point fixe

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine r de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Si on pose $g(x) = 1/(1+x)$, cette équation est équivalente à $g(x) = x$.

1. Trouver un intervalle J sur lequel la convergence de la méthode du point fixe est assurée (i.e., trouver un intervalle J sur lequel g est contractante).
2. Déterminer analytiquement, grâce au théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne (cf. cours chapitre 2 page 33), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-3} près de cette racine.
3. En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$.

II. Méthode de Newton

On considère l'équation $f(x) = \ln x - \frac{x}{5} = 0$.

1. Montrer que cette équation a une racine r appartenant à l'intervalle $J =]1, 2[$.
2. Vérifier analytiquement la convergence de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ dans J.
3. Soit $g(x)$ la fonction intervenant dans la méthode, associée à la résolution de cette équation dans J. Montrer que $r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}$, où r_n désigne la valeur approchée de r à la $n$ième itération. Montrer analytiquement que l'on a la majoration suivante

$$|r_n - r| \leq K \left| r_{n+1} - r_n \right|,$$

où K est un majorant de $\left| \frac{1}{1-g'(x)} \right|$ sur J. On pourra évaluer $(r_{n+1} - r_n) = (r_{n+1} - r) - (r_n - r)$ à l'aide du théorème des accroissement finis ou de la valeur moyenne. En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de la racine de r.

III. Méthode de Cramer

Résoudre le système suivant avec la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

IV. Méthode d'élimination de Gauss

1. Transformer le système de l'exercice précédent en un système triangulaire supérieur.
2. Résoudre le système par substitution arrière.

IV. Méthode d'élimination de Gauss avec pivotage

1. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage partiel.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 26, \\ 3x + 2y + z &= 39, \\ 2x + 3y + z &= 34. \end{aligned}$$

2. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage total.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1, \\ 2x + y + z &= 1, \\ x + 2y + 3z &= 1. \end{aligned}$$