DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 2

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthode du point fixe

On se propose de calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine r de l'équation

$$x^2 + x - 1 = 0. \tag{1}$$

Si on pose $g(x) = 1/(1+x)$, l' équation (1) est équivalente à $g(x) = x$.

1. Trouver un intervalle J sur lequel la convergence de la méthode du point fixe est assurée (i.e., trouver un intervalle J sur lequel g est contractante).
2. Déterminer analytiquement, en utilisant le théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne (cf. cours chapitre 2 page 33), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-3} près de cette racine.
3. En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$.

Réponse

1.

Une étude sommaire de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 1$ permet de localiser r dans l'intervalle $J = [0.5, 1]$ (parceque $f(0.5)f(1) < 0$ et f croissant sur J). La fonction g est continue sur J et sa dérivée s'écrit

$$g'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Cette dérivée vérifie sur J,

$$|g'(x)| \leq \frac{4}{9}. \tag{2}$$

donc g est contractante sur J (en toute rigueur, on doit aussi vérifier que $\forall x \in J, g(x) \in J$, ce qui est le cas ici aussi). La convergence de la méthode du point fixe est assurée sur cet intervalle.

2.

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g(r) = r$ et $r_n = g(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la n-ième itération

$$\begin{aligned} r_n - r &= \frac{g(r_{n-1}) - g(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r) \\ &= g'(\zeta) \times (r_{n-1} - r) \qquad \text{avec} \quad \zeta \in J \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (2), on obtient les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |r_n - r| \leq \frac{4}{9}\,|r_{n-1} - r| &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^2 |r_{n-2} - r| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |r_0 - r| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On obtiendra donc $|r_n - r| < 10^{-3}$ des que

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{9}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) &< 10^{-3} \\ n\ln\left(\frac{4}{9}\right) &< \ln(2\times 10^{-3})\end{aligned}$$

Soit pour tout $n \geqslant 8$. En partant de $r_0 = 1$, on a, $r_n = g(r_{n-1})$ et

$$\begin{aligned} r_0 &= 1 \\ r_1 &= 0.5 \\ r_2 &= 0.666666666 \\ r_3 &= 0.6 \\ r_4 &= 0.625 \\ r_5 &= 0.615384 \\ r_6 &= 0.61904 \\ r_7 &= 0.617647 \\ r_8 &= 0.61818 \end{aligned}$$

Pour $n = 8$, on a $\left(\frac{4}{9}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right) < 0.0008$. Ce qui permet de choisir comme valeur approchée de r à 10^{-3} près l'une des valeurs approchées décimales r'_8 de r_8 à 10^{-4} près, puisqu'alors

$$\begin{aligned}|r'_8 - r| = |r'_8 - r_8 + r_8 - r| &\leq |r'_8 - r_8| + |r_8 - r| \\ &\leq 10^{-4} + 8\times 10^{-4} < 10^{-3}.\end{aligned}$$

On pourra donc prendre 0.6182 ou 0.6181 comme valeur approchée à 10^{-3} près.

II. Méthode de Newton

On considère l'équation $f(x) = \ln x - \frac{x}{5} = 0$.

1. Montrer que cette équation a une racine r appartenant à l'intervalle $J =]1, 2[$.
2. Vérifier analytiquement la convergence de la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$ dans J.
3. Soit g la fonction intervenant dans la méthode, associée à la résolution de cette équation dans J. En utilisant $r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})}$, où r_n désigne la valeur approchée de r à la $n$ième itération, montrer analytiquement que l'on a la majoration suivante

$$|r_n - r| \leq K\,|r_{n+1} - r_n|\,,$$

   où K est un majorant de $\left|\frac{1}{1-g'(x)}\right|$ sur J. On pourra évaluer $(r_{n+1} - r_n) = (r_{n+1} - r) - (r_n - r)$ à l'aide du théorème des accroissement finis ou de la valeur moyenne.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-6} près de la racine r.

Réponse

1.

Soit f définie par $f(x) = \ln x - \frac{x}{5}$. L'étude de la variation de f met en évidence une racine dans chacun des intervalles $]0, 5]$ et $]5, +\infty[$ où f est respectivement croissante et décroissante ($f'(x) = 1/x - 1/5 > 0$, donc croissant, si $x < 5$ et inversement). Comme on a $f(1) = -0.20$ et $f(2) \approx 0.293$, on peut localiser la première racine dans l'intervalle $]1, 2[$.

2. La fonction g utilisée dans la méthode de Newton est

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{5x}{5-x} \times (1 - \ln x)$$

qui a pour dérivée sur $]5, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{f(x) \times f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{25}{(5-x)^2} \times \left(\frac{x}{5} - \ln x\right)$$

On a

$$|f(x)| = \left|\ln x - \frac{x}{5}\right| \leq 0.293 \quad \text{sur} \quad J \qquad \forall\, x \in J$$

et d'autre part

$$\forall\, x \in J \qquad 0 \leq \frac{25}{(5-x)^2} \leq \frac{25}{9}$$

D'où il résulte :

$$|g'(x)| < 0.82 \qquad \forall\, x \in J \tag{3}$$

La fonction g est donc contractante sur J (en toute rigueur, on doit aussi vérifier que $\forall x \in J, g(x) \in J$, ce qui est le cas ici aussi). La convergence de la méthode de Newton est assurée pour la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

3. La méthode itérative de Newton s'écrit

$$r_n = r_{n-1} - \frac{f(r_{n-1})}{f'(r_{n-1})} = \frac{5r_{n-1}}{5 - r_{n-1}} \times (1 - \ln r_{n-1})$$

En utilisant le théorème des accroissement finis, on a

$$\begin{aligned}
r_{n+1} - r_n &= (r_{n+1} - r) - (r_n - r) \\
&= (g(r_n) - g(r)) - (r_n - r) \\
&= \frac{(g(r_n) - g(r)) - (r_n - r)}{(r_n - r)} \times (r_n - r) \\
&= (g'(\zeta) - 1) \times (r_n - r) \quad \text{avec } \zeta \text{ compris entre } r_n \text{ et } r
\end{aligned}$$

De ce fait, on a

$$|r_n - r| = \frac{1}{|1 - g'(\zeta)|} \times |r_{n+1} - r_n|$$

D'après l'équation (3), on a

$$\forall x \in J \qquad |g'(x)| < 0.82$$

d'où

$$\frac{1}{|1-g'(\zeta)|} \leq 5.56$$

et on peut écrire

$$|r_n - r| \leq 5.56 \times |r_{n+1} - r_n|$$

Si on veut $|r_n - r|$ inférieur à 10^{-6}, il suffit de choisir n tel que

$$|r_{n+1} - r_n| < \frac{10^{-6}}{6}$$

En partant de $r_0 = 1$, on obtient $r_n = \frac{5r_{n-1}}{5-r_{n-1}} \times (1 - \ln r_{n-1})$ et

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1 \\
r_1 &= 1.25 \\
r_2 &= 1.294760748 \\
r_3 &= 1.295854885 \\
r_4 &= 1.295855509 \\
r_5 &= 1.295855509
\end{aligned}$$

III. Méthode de Cramer

Résoudre le système suivant avec la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} 5x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Réponse

On a $Ax = b$ avec A, x, et b, les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les déterminants de A et des matrices A_1, A_2 et A_3 obtenues en remplacant la jième colonne de A par le vecteur b. On obtient,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 = -15$$

En remplacant dans A, la première colonne par le vecteur b, on a

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A_1| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

De même

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (ligne 3=ligne 3 + ligne 1) et on obtient

$$|A_2| = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

De même, on a

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

en faisant (colonne 2=colonne 2 - colonne 1) et on obtient

$$|A_3| = 1 \times \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -20$$

Et donc, par définition (cf. cours) :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3} \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-15}{-15} = 1 \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-20}{-15} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

IV. Méthode d'élimination de Gauss

1. Transformer le système de l'exercice précédent en un système triangulaire supérieur.
2. Résoudre le système par substitution arrière.

Réponse
1.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = 5l_2 - 3l_1$ et $l_3 = 5l_3 - l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = 16l_3 - 7l_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 16 & -3 \\ 0 & 0 & -75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -100 \end{pmatrix}$$

2.
Par substitution arrière, on obtient

$$\begin{array}{rrcl} & x3 & = & \frac{4}{3} \\ 16x_2 - 4 = 12 \quad \text{donc} & x_2 & = & 1 \\ 5x_1 - 2 + \frac{4}{3} = 1 \quad \text{donc} & x_1 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

IV. Méthode d'élimination de Gauss avec pivotage

1. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage partiel.

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 26 \\ 3x + 2y + z & = & 39 \\ 2x + 3y + z & = & 34 \end{array}$$

2. Trouver la solution du système suivant par élimination de Gauss et pivotage total.

$$\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 1 \\ x + 2y + 3z & = & 1 \end{array}$$

Réponse
1.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26\\39\\34\end{pmatrix}\qquad l_1 \rightleftarrows l_2 \qquad \begin{pmatrix}3&2&1\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\26\\34\end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = -\frac{1}{3}l_1 + l_2$ et $l_3 = l_3 - \frac{2}{3}l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}\\0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\13\\8\end{pmatrix}\qquad l_2 \rightleftarrows l_3 \qquad \begin{pmatrix}3&2&1\\0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\8\\13\end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = -\frac{4}{5}l_2 + l_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{36}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}39\\8\\\frac{33}{5}\end{pmatrix}$$

Par substitution arrière, on obtient

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{37}{4}\\[1em]\frac{17}{4}\\[1em]\frac{11}{4}\end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad l_1 \rightleftarrows l_3 \qquad c_1 \rightleftarrows c_3 \qquad \begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = -\frac{1}{3}l_1 + l_2$ et $l_3 = l_3 - \frac{2}{3}l_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\0&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{9}\end{pmatrix}\qquad c_2 \rightleftarrows c_3 \qquad \begin{pmatrix}3&1&2\\0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = -\frac{1}{5}l_2 + l_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\0&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&\frac{-6}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\\\frac{3}{15}\end{pmatrix}$$

Et donc

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$