DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N^o 3

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthode de Gauss-Jordan

Trouver la solution du système suivant par la méthode de Gauss-Jordan sans pivotage.

$$\begin{aligned} 7x + 13y - 4z &= 16, \\ 13x - 7y - 3z &= 3, \\ 8x + 2y - 5z &= 5, \end{aligned}$$

en faisant les calculs avec trois chiffres significatifs.

II. Méthode de Gauss pour la décomposition LU d'une matrice

Cet exercice va rappeler le cours en présentant comment la méthode de Gauss peut être utilisée pour, en plus de résoudre le système d'équations,

- Calculer le déterminant de la matrice.
- Décomposer la matrice initiale en deux matrices LU ;
  i.e., une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

1. Trouver la matrice triangulaire supérieure augmentée du système suivant par la méthode de Gauss avec pivotage.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 15, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 8, \\ x_1 - x2 + 3x_3 &= 13. \end{aligned}$$

2. Résoudre le système par substitution arrière.
3. En déduire la décomposition LU de la matrice.
4. en déduire le déterminant du système.

III. Norme d'une matrice

Calculer la norme ∞ et la norme 1 de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

IV. Décomposition LU directe

1. Décomposer la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

en une matrice triangulaire inférieure (L) et supérieure (U) tel que :

$$\begin{aligned} A &= LU, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}. \end{aligned}$$

2. Puis résoudre le système $Ax = b$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V. Déterminant et inverse de matrice par décomposition LU

1. Décomposer la matrice A en produit de matrice LU,

$$\text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de la matrice A en se servant du résultat de la décomposition LU obtenu.
3. Calculer l'inverse de la matrice grace a la décomposition LU obtenue.