DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 3

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthode de Gauss-Jordan

Trouver la solution du système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 7x & +13y & -4z & = & 16 \\ 13x & -7y & -3z & = & 3 \\ 8x & +2y & -5z & = & 5 \end{array}\right.$$

par la méthode de Gauss-Jordan sans pivotage, en faisant les calculs avec trois chiffres significatifs.

Réponse

On élimine d'abord x dans les équations (2) et (3), ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 7x & +13y & -4z & = & 16 \\ & -31.1y & +4.43z & = & -26.7 \\ & -12.9y & -0.429z & = & -13.3 \end{array}\right.$$

On élimine ensuite y (tiré de la 2ième équation) dans la 1ère et la 3ième équation, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 7x & & -2.15z & = & 4.84 \\ & -31.1y & +4.43z & = & -26.7 \\ & & -2.27z & = & -2.23 \end{array}\right.$$

On élimine enfin z dans la 1ère et la 2ième équation, ce qui donne le système

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 7x & & & = & 6.95 \\ & -31.1y & & = & -31.1 \\ & & -2.27z & = & -2.23 \end{array}\right.$$

D'où l'on tire $x = 0.993,\ y = 1.000,\ z = 0.982$. Le fait de n'avoir conservé que 3 chiffres significatifs conduit à un résultat légèrement différent de la solution réelle ($x = 1.0,\ y = 1.0,\ z = 1.0$).

II. Méthode de Gauss pour la décomposition LU d'une matrice

Cet exercice va rappeler le cours en présentant comment la méthode de Gauss peut être utilisée pour, en plus de résoudre le système d'équations,

- Calculer le déterminant de la matrice.
- Décomposer la matrice initiale en deux matrices LU ;
  i.e., une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

1. Calculer la matrice triangulaire supérieure augmentée du système suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 15 \\ -3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 8 \\ x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 13 \end{array}\right. \tag{1}$$

   par la méthode de Gauss avec pivotage.
2. Résoudre le système (1) par substitution arrière.
3. En déduire la décomposition LU de la matrice du système (1).

4. En déduire le déterminant de la matrice du système.

Réponse

1.

La matrice augmentée du systéme s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

En faisant $Eq_2 = (3/4)Eq_1 + Eq_2$ et $Eq_3 = -(1/4)Eq_1 + Eq_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & -0.5 & 2.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 19.25 \\ 9.25 \end{pmatrix}$$

En faisant $Eq_3 = -(-0.5/-2.5)Eq_2 + Eq_3$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & 0.0 & 1.80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 19.25 \\ 5.40 \end{pmatrix}$$

2.

Par substitution arrière, on peut résoudre le système, ce qui permet de trouver $x_3 = 3,\ x_2 = -2,\ x_1 = 2.$

3.

L'une des avantage de cette méthode est que l'on peut très facilement faire une décomposition LU de la matrice originale en écrivant

$$A = L \times U,$$

$$\text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{et} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.20 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2.5 & 4.75 \\ 0 & 0 & 1.80 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Les éléments de la matrice L sont les coefficients qui nous ont permis de réduire la matrice originale A en une matrice triangulaire supérieure.

4.

Le déterminant d'un produit de matrice est le produit des déterminants. De plus le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux. De ce fait, nous avons

$$\begin{aligned} \det(LU) &= \det(L) \times \det(U) \\ &= (4) \times (-2.5) \times (1.8) \\ &= -18 \end{aligned}$$

Le déterminant de la matrice originale A est ensuite donnée par la formule suivante

$$\det(A) = (-1)^m \times \det(LU)$$

avec m représentant le nombre de lignes interchangées durant le la triangularisation de la matrice originale. Dans notre cas, aucune permutation de ligne a été nécéssaire pour triangulariser la matrice originale A et donc $\det(A) = -18$.

III. Norme d'une matrice

Calculer la norme ∞ et la norme 1 de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$$

Réponse

La norme 1 ($\|.\|_1$) correspond à la plus grande somme des valeurs absolues des éléments d'une colonne. La norme ∞ ($\|.\|_\infty$) correspond à la plus grande somme sur les valeurs absolues des éléments d'une ligne.

Par définition,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|$$

Donc on obtient, pour $j = 1$,

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = |1| + |2| + |-1| = 4$$

Pour $j = 2$,

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = |-2| + |4| + |14| = 20$$

Pour $j = 3$,

$$\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = |-3| + |-1| + |11| = 15$$

Donc,

$$\|A\|_1 = \max\{4, 20, 15\} = 20$$

Par définition,

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}|$$

Donc, on obtient pour $i = 1$,

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |-2| + |-3| = 6$$

Pour $i = 2$,

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |2| + |4| + |-1| = 7$$

Pour $i = 3$,

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |-1| + |-14| + |11| = 26$$

Donc

$$\|A\|_\infty = \max\{6, 7, 26\} = 26$$

IV. Décomposition LU directe

1. Décomposer la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

en une matrice triangulaire inférieure (L) et supérieure (U) tel que :

$$\begin{aligned} A &= LU, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \end{aligned}$$

2. Puis résoudre le système $Ax = b$ avec

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Réponse

1.

On applique la formule vue en cours ou donnée dans le livre de référence, et on obtient :

$$l_{11} = a_{11} = 1$$
$$l_{21} = a_{21} = 2$$
$$l_{31} = a_{31} = 1$$
$$l_{41} = a_{41} = 1$$

$$u_{12} = \frac{1}{l_{11}} a_{12} = 1$$
$$u_{13} = \frac{1}{l_{11}} a_{13} = 1$$
$$u_{14} = \frac{1}{l_{11}} a_{14} = 2$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -1$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 1$$
$$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = 1$$

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}}(a_{23} - l_{21}u_{13}) = 1$$
$$u_{24} = \frac{1}{l_{22}}(a_{24} - l_{21}u_{14}) = 3$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -1$$
$$l_{43} = a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} = 1$$

$$u_{34} = \frac{1}{l_{33}}(a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}) = 4$$

$$l_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = -5$$

Donc,

$$LU = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

On résoud par substitution avant $Ly = b$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient,

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Et finalement, on résoud $Ux = y$ par substitution arrière,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

On obtient,

$$x = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

V. Déterminant et inverse de matrice par décomposition LU

1. Décomposer la matrice A en produit de matrice LU,

$$\text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de la matrice A en se servant du résultat de la décomposition LU obtenu.
3. Calculer l'inverse de la matrice grâce à la décomposition LU obtenue.

Réponse

1.

Soit

$$\begin{aligned} A &= LU, \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \end{aligned}$$

On obtient :

$$l_{11} = a_{11} = 1$$

$$l_{21} = a_{21} = -1$$

$$l_{31} = a_{31} = 3$$

$$u_{12} = \frac{1}{l_{11}} a_{12} = 4$$
$$u_{13} = \frac{1}{l_{11}} a_{13} = -2$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 6$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} = -9$$

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}} (a_{23} - l_{21} u_{13}) = -1/2$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 3/2$$

Donc,

$$LU = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & -9 & 3/2 \end{pmatrix}}_{L} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

2.

Le déterminant d'un produit de matrice est le produit des déterminants. De plus le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux. De ce fait, nous avons

$$\begin{aligned} \det(A) = (-1)^0 \times \det(LU) &= \det(L) \times \det(U) \\ &= (1) \times (6) \times (3/2) \\ &= 9 \end{aligned}$$

3.

On a

$$A = LU \Rightarrow A^{-1} = (LU)^{-1}$$

De plus,

$$\begin{aligned} (LU)^{-1} LU &= I \\ (LU)^{-1} LUU^{-1} &= U^{-1} \\ (LU)^{-1} LL^{-1} &= U^{-1} L^{-1} \\ (LU)^{-1} &= U^{-1} L^{-1} \end{aligned}$$

Calculons L^{-1}, on a successivement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \\ 3 & -9 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = l_2 + l_1$ et $l_3 = l_3 - 3l_1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = l_2/6$ et $l_3 = l_3 + 9l_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_3 = (2/3)l_3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ -1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ -1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Calculons U^{-1}, on a successivement,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_2 = l_2 + l_3/2$ et $l_1 = l_1 + 2l_3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant $l_1 = l_1 - 4l_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, puisque $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ -1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$