DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 2	**Résolution de système d'équations linéaires**
I	Décomposition $P^t LU$.
II	Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés.
III	Amélioration itérative (complément du cours).
IV	Conditionnement d'une matrice.
V	Résolution d'un systéme par la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

I. Décomposition P^tLU

Résoudre le systéme suivant et décomposer la matrice A du système suivant en matrice P^tLU avec P la matrice de permutation et LU les matrice triangulaires inférieures et supérieures obtenues par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot (résolution du système par substitution arrière).

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

II. Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés

Lors d'une expérience, on a les observations suivantes sur un phénoméne physique

$$\begin{array}{lcl} (x & , & y) \\ (2 & , & 6.5) \\ (4 & , & 8.5) \\ (5 & , & 11) \\ (6 & , & 12.5) \end{array}$$

On cherche à trouver une relation linéaire liant la premiére et la deuxieme donné de cette experience. Concrétement on cherche à trrouver la meilleur droite (au sens de l'erreur quadratique moyenne) passant par ces points.

III. Amélioration itérative (complément du cours)

Soit x^* la solution approximative (à cause de l'erreur d'arrondie et de troncature) du systéme $Ax = b$. Il est possible d'améliorer itérativement ou de corriger cette approximation en définissant $e = x - x^*$ et $r = b - Ax^*$. Montrer que e, l'erreur sur l'approximation de x^* est solution du systéme suivant :

$$Ae = r.$$

Calculer ensuite une valeur plus exacte de x en réalisant l'opération suivante.

$$x = x^* + e.$$

En fait, cette estimation de e et cette dernière correction est elle aussi sujette aux erreurs d'arrondis, et de ce fait, on peut répéter cette opération de correction itérative jusqu'a ce que l'on obtient la vrai valeur de x. Faite un exemple sur le systéme suivant, en prenant 3 cse apres la virgule (tronquée) pour la premiere approximation et en calculant la correction avec 6 cse (double précision) :

$$A = \begin{pmatrix} 4.23 & -1.06 & 2.11 \\ -2.53 & 6.77 & 0.98 \\ 1.85 & -2.11 & -2.32 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b = \begin{pmatrix} 5.28 \\ 5.22 \\ -2.58 \end{pmatrix}.$$

IV. Conditionnement d'une matrice

Trouver le conditionnement des matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1.000001 & 4.000001 & -2.000001 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utiliser la norme $\|.\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

V. Méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi puis par la méthode de Gauss-Seidel en prenant la condition initiale $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^t$ dans les deux cas.

$$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 - x_3 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 12, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -4. \end{aligned}$$