DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 4

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 2	**Résolution de système d'équations linéaires**
I	Décomposition P^tLU.
II	Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés.
III	Amélioration itérative (complément du cours).
IV	Conditionnement d'une matrice.
V	Résolution d'un systéme par la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

I. Décomposition P^tLU

Résoudre le systéme suivant et décomposer sa matrice A en produit de matrices P^tLU avec P la matrice de permutation et LU le produit de deux matrices triangulaires inférieures et supérieures obtenues par la méthode d'élimination de Gauss avec pivot (résolution du système par substitution arrière).

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ -x_1 & -x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Réponse

Le système précédent conduit à la matrice augmentée suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On intervertit la ligne 1 et la ligne 2 ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'opération $\text{ligne}_j = \text{ligne}_j - m_{j1}\text{ligne}_1$ donne, ($j = 3$ et 4).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'opération $\text{ligne}_4 = \text{ligne}_4 - \text{ligne}_2$ donne,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En interchangeant les lignes 3 et 4, on trouve,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La résolution par substitution arriére nous donne $x_4 = 2$, $x_3 = 0$, $x_2 = -1$ et $x_1 = 1$. Les permutations ; (ligne 1 $\leftrightarrow$ ligne 2) et (ligne 3 $\leftrightarrow$ ligne 4) ont été fait durant cette triangularisation. La matrice originale A

est donc multipliée par la matrice de permutation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenue en interchangeant (ligne 1 $\leftrightarrow$ ligne 2) et (ligne 3 $\leftrightarrow$ ligne 4) de la matrice identité de même dimension pour donner le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient facilement la décomposition LU de cette matrice (cf. précédente démo)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{PA} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}$$

Avec $PA = LU$ et $P^tP = I$ donc,

$$A = P^tLU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota : Si à l'étape du calcul de la matrice de permutation, on avait interchangé les colonne au lieu des lignes de la matrice d'identité, on aurait eu une décomposition $A = PLU$.

II. Méthode des moindres carrés pour les systèmes surdéterminés

Lors d'une expérience, on a les observations suivantes sur un phénoméne physique

$$\begin{array}{lcl} (x & , & y) \\ (2 & , & 6.5) \\ (4 & , & 8.5) \\ (5 & , & 11) \\ (6 & , & 12.5) \end{array}$$

On cherche à trouver une relation linéaire liant la premiére et la deuxieme donné de cette experience. Concrétement on cherche à trrouver la meilleur droite (au sens de l'erreur quadratique moyenne) passant par ces points.

Réponse

L'équation de la droite passant plus près (au sens des moindres carrés) de tous les points ci dessus est donnée par :

$$y = mx + b$$

En suppoant que cette droite passe par tous les points, on doit résoudre le système surdéterminé et inconsistant suivant

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2m & +b & = & 6.5 \\ 4m & +b & = & 8.5 \\ 5m & +b & = & 11 \\ 6m & +b & = & 12.5 \end{array}\right.$$

En notation matricielle, le système s' écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 8.5 \\ 11 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit $A^t A$,

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 17 & 81 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit $(A^t A)^{-1}$,

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 81 & -17 \\ -17 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculons le produit $(A^t A)^{-1} A^t$,

$$(A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 81 & -17 \\ -17 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 47 & 13 & -4 & -21 \\ -9 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Donc (cf. cours), on a,

$$\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = (A^t A)^{-1} A^t b = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 47 & 13 & -4 & -21 \\ -9 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6.5 \\ 8.5 \\ 11 \\ 12.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la relation linéaire liant la première et ls deuxième donnée (x, y) de cette expérience est donnée par $y = 1.5x + 3.1$.

III. Amélioration itérative (complément du cours)

Soit x^* la solution approximative (à cause de l'erreur d'arrondie et de troncature) du système $Ax = b$. Il est possible d'améliorer itérativement ou de corriger cette approximation en définissant l'erreur sur l'approximation $e = x - x^*$ et $r = b - Ax^*$. Montrer que e est solution du systéme suivant :

$$Ax = r.$$

Calculer ensuite une valeur plus proche de la valeur exacte de x en réalisant l'opération suivante

$$x = x^* + e.$$

En fait, cette estimation de e et cette dernière correction est elle aussi sujet aux erreurs d'arrondis, et de ce fait, on peut répéter cette opération de correction itérative jusqu'à ce que l'on obtient la vraie valeur de x. Faite un exemple sur le systéme suivant, en prenant 3 cse apres la virgule (tronquée) pour la première approximation et en calculant la correction avec 6 cse (double précision) :

$$A = \begin{pmatrix} 4.23 & -1.06 & 2.11 \\ -2.53 & 6.77 & 0.98 \\ 1.85 & -2.11 & -2.32 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b = \begin{pmatrix} 5.28 \\ 5.22 \\ -2.58 \end{pmatrix}$$

Réponse

On a

$$r = b - Ax^* = Ax - Ax^* = A(x - x^*) = Ae.$$

Car $Ax = b$. Donc si on connait la vraie erreur e, on pourrait calculer la vraie valeur du vecteur x par la relation : $e = x - x^*$

En prenant l'exemple donné, on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.199 & 0.101 & 0.224 \\ 0.059 & 0.200 & 0.138 \\ 0.105 & -0.102 & -0.379 \end{pmatrix}$$

La vrai solution est $x = (1.000 \;\; 1.000 \;\; 1.000)^t$. Une solution approximative est :

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 1.000 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

On trouve r en posant

$$\begin{aligned} r &= b - Ax^*, \\ &= \begin{pmatrix} 5.28 \\ 5.22 \\ -2.58 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4.23 & -1.06 & 2.11 \\ -2.53 & 6.77 & 0.98 \\ 1.85 & -2.11 & -2.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.992 \\ 1.000 \\ 0.997 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0394601 \\ -0.0172384 \\ 0.00799668 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Trouvons maintenant une approximation e^* de e tel que $Ae^* = r$

$$e^* = \begin{pmatrix} 0.00787252 \\ -0.0000120394 \\ 0.00282218 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$x = x^* + e^* = \begin{pmatrix} 0.992 \\ 1.000 \\ 0.997 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00787252 \\ -0.0000120394 \\ 0.00282218 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{pmatrix}$$

Ce qui a permis d'améliorer la solution. On peut faire plusieurs itérations jusqu'à ce que l'on obtient une solution très proche du résultat.

IV. Conditionnement d'une matrice

Trouver le conditionnement des matrices suivante en utilisant la norme $\|.\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1.000001 & 4.000001 & -2.000001 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse

On trouve[1],

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -666667 & 666667 & 0.22222 \\ 666667 & -666667 & 0.11111 \\ 10^6 & -10^6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

On trouve,

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= |4| + |2| + |3| = 9 \\ \text{et} \quad \|A^{-1}\|_1 &= |1| + |2/3| + |2/3| = 7/3 \\ \text{donc} \quad \text{cond}(A)_1 &= \|A\|_1 \times \|A^{-1}\|_1 = 9 \times 7/3 = 21 \end{aligned}$$

Ainsi que,

$$\begin{aligned} \|B\|_1 &= |4| + |4.000001| + |3| = 11.000001 \\ \text{et} \quad \|B^{-1}\|_1 &= 2333334 \\ \text{donc} \quad \text{cond}(B)_1 &= \|B\|_1 \times \|B^{-1}\|_1 = 11.000001 \times 2333334 = 2.6 \times 10^7 \end{aligned}$$

Donc, A est beaucoup mieux conditionnée que B.

V. Méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Résoudre le système suivant par la méthode de Jacobi puis par la méthode de Gauss-Seidel en prenant la condition initiale $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^t$ dans les deux cas.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 8x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & +x_2 & +9x_3 & = & 12 \\ x_1 & -7x_2 & +2x_3 & = & -4 \end{array} \right.$$

Réponse

[1] Rappel : Le conditionnement d'une matrice est $\text{cond}(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$. Une matrice A est d'autant mieux conditionnée que $\text{cond}(A)$ est petit.

Méthode de Jacobi

On réarrange le système pour avoir les éléments maximals sur la diagonale, on obtient,

$$\begin{cases} 8x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 8 \\ x_1 & -7x_2 & +2x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & +x_2 & +9x_3 & = & 12 \end{cases}$$

La condition de convergence est bien remplie car la matrice de ce systéme est diagonalement dominante (i.e., nous avons $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}|$). On exprime le système sous la forme suivante,

$$\begin{cases} x_1^{[n+1]} = & 1 & & -0.125x_2^{[n]} & +0.125x_3^{[n]} \\ x_2^{[n+1]} = & 0.571 & +0.143x_1^{[n]} & & +0.286x_3^{[n]} \\ x_3^{[n+1]} = & 1.333 & -0.222x_1^{[n]} & -0.111x_2^{[n]} & \end{cases}$$

En prenant la condition initiale $x^{[0]} = (0\ 0\ 0)^t$, on obtient itérativement,

Itération	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0	1.000	1.095	0.995	0.993	1.001	1.001	1.000
x_2	0	0.571	1.095	1.027	0.990	0.998	1.001	1.000
x_3	0	1.333	1.048	0.968	0.998	1.003	0.999	1.000

Méthode de Gauss Seidel

On exprime le système sous la forme suivante

$$\begin{cases} x_1^{[n+1]} = & 1 & & -0.125x_2^{[n]} & +0.125x_3^{[n]} \\ x_2^{[n+1]} = & 0.571 & +0.143x_1^{[n+1]} & & +0.286x_3^{[n]} \\ x_3^{[n+1]} = & 1.333 & -0.222x_1^{[n+1]} & -0.111x_2^{[n+1]} & \end{cases}$$

En prenant la condition initiale $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^t$, on obtient itérativement,

Itération	0	1	2	3	4	5
x_1	0	1.000	1.040	0.997	1.001	1.000
x_2	0	0.714	1.015	0.996	1.000	1.000
x_3	0	1.032	0.990	1.001	1.000	1.000

On peut remarquer que la convergence est plus rapide avec cette méthode.