DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N^o 5

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Résolution de système d'équations non linéaires

Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & -cos(y) & -0.5 & = & 0 \\ x^2 & -2y^2 & +1 & = & 0 \end{array} \right.$$

par la méthode du point fixe sachant que la racine que l'on cherche est incluse dans l'itervalle de départ ; i.e. ; $x, y \in J = [0 \;\; 1[$. On démarerra la procédure itérative du point fixe avec $x^{[0]} = 0$ et $y^{[0]} = 0$ et pour l'isolement de l'inconnu y dans la seconde équation, on prendra la forme positive $+\sqrt{}$.

Réponse

Posons $f_1(x, y) = 3x - \cos(y) - 0.5$ et $f_2(x, y) = x^2 - 2y^2 + 1$. L'approche itérative conduisant à l'estimation numérique de ce système d'équations non linéaires par la méthode du point fixe est (en privilégiant la forme positive $+\sqrt{}$ pour la seconde équation comme il est précisé dans l'énoncé) conduit à :

$$\begin{pmatrix} x^{[n+1]} \\ \\ y^{[n+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos(y^{[n]}) + \frac{1}{6} \\ +\sqrt{\frac{x^{2\;[n]}}{2} + \frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

On vérifie que la condition de convergence est bien respectée. On a mis ces deux équations sous la forme $x = g_1(x, y) = \frac{1}{3}\cos(y) + \frac{1}{6}$ et $y = g_2(x, y) = +\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}$. Il ne nous reste plus qu'à vérifier que sur J, on a bien :

$$\left|\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y}\right| < 1$$

Dans notre cas, on a bien : $\left|-\frac{1}{3}\sin(y)\right| < 1$ et $\left|\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}}}\right| < 1$ quand x et $y \in [0 \;\; 1[$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^{[0]} \\ y^{[0]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^{[1]} \\ y^{[1]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.500 \\ 0.707 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^{[2]} \\ y^{[2]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.420 \\ 0.767 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^{[3]} \\ y^{[3]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.407 \\ 0.763 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ps Si on prend dans le seconde équation, la forme négative $-\sqrt{}$, cela va diverger car la condition $x^{[n]}, y^{[n]} \in J$ n'impliquera pas $x^{[n+1]}, y^{[n+1]} \in J$.

II. Interpolation par résolution de système d'équations

Trouver le polynôme passant par les points suivants : $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -1)$, $(3, 1)$.

Réponse

On a quatre points, on peut donc passer un polynôme de degré au plus égale à trois passant par ces quatre points. Ce polynôme s'écrit :

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Si ce polynôme passe par ces quatre points, on a le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} & & & +a_0 & = & 0 \\ a_3 & +a_2 & +a_1 & +a_0 & = & 2 \\ -a_3 & +a_2 & -a_1 & +a_0 & = & -1 \\ 27a_3 & +9a_2 & +3a_1 & +a_0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Donc, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système nous donne

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11/6 \\ 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme passant par les point $(0,0)$,$(1,2)$,$(-1,-1)$ et $(3,1)$ s'écrit $P(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x$.

Remarque : Lorsqu'on a beaucoup de points à interpoler, le degré du polynôme de collocation est grand. De ce fait, il y a beaucoup de coefficient à résoudre et cette méthode n'est pas très efficace. De plus, lorsque les points de donnés sont perturbées par une erreur numérique (erreur de quantification), le système est très mal conditionné et entraine des erreurs sur la solution du système (les coefficients a_i du polynome).

III. Interpolation par méthode de Lagrange

Trouver le polynôme de Lagrange passant par les points suivants : $(0,0),\ (1,2),\ (-1,-1),\ (3,1)$.

Réponse

Le polynôme de Lagrange passant par les points (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) s'écrit :

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\pi_i(x)}{\pi_i(x_i)} y_i$, où $\pi_i(x) = \Pi_{j\neq i, j=0}^{n}(x - x_j)$ avec $i = 0, 1, \ldots, n$. Dans notre cas, on trouvera par cette méthode un polynôme de degré trois :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\pi_i(x)}{\pi_i(x_i)} y_i$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\pi_0(x) &= \Pi_{j=0,j\neq 0}^{3}(x-x_j) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x-1)(x+1)(x-3) = x^3-3x^2-x+3\\
\pi_1(x) &= \Pi_{j=0,j\neq 1}^{3}(x-x_j) = (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3) = x(x+1)(x-3) = x^3-2x^2-3x\\
\pi_2(x) &= \Pi_{j=0,j\neq 2}^{3}(x-x_j) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) = x(x-1)(x-3) = x^3-4x^2+3x\\
\pi_3(x) &= \Pi_{j=0,j\neq 3}^{3}(x-x_j) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x(x-1)(x+1) = x^3-x
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
\pi_0(x_0) &= \pi_0(0) = 3\\
\pi_1(x_1) &= \pi_1(1) = -4\\
\pi_2(x_2) &= \pi_2(-1) = -8\\
\pi_3(x_3) &= \pi_3(3) = 24
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{x^3-3x-x+3}{3}\times 0 + \frac{x^3-2x^2-3x}{-4}\times 2 + \frac{x^3-4x^2+3x}{-8}\times(-1) + \frac{x^3-x}{24}\times 1,\\
P_3(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}x.
\end{aligned}$$

IV. Interpolation par méthode de Newton-Grégory

A l'aide de la méthode de Newton-Grégory descendante, trouver un polynôme de degré trois passant par les points suivants : $(1,4),\ (2,-2),\ (3,3),\ (4,1)$. Calculer ensuite $P(s)$ en $x=3/2$.

Réponse

Le polynôme de collocation est donné par,

$$P_3(s) = \Delta^0 y_0 + \frac{\Delta^1}{1!}y_0 s + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}s(s-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!}s(s-1)(s-2)$$

où $s=(x-x_0)/h$ avec $h=1$.

On doit trouver donc dans un premier temps les différences descendantes,

x	y	Δy	Δ^2 y	$\Delta^3 y$
1	4			
2	-2	-2-4=-6	5-(-6)=11	-7-11=-18
3	3	3-(-2)=5	-2-5=-7	
4	1	1-3=-2		

Pour trouver le polynôme de degré trois passant ces points, nous avons besoins seulement de $\Delta^0 y_0$, $\Delta^1 y_0$, et $\Delta^2 y_0$, et $\Delta^3 y_0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\Delta^0 y_0 &= 4\\
\Delta^1 y_0 &= -6\\
\Delta^2 y_0 &= 11\\
\Delta^3 y_0 &= -18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(s) &= 4 - \frac{6}{1!}s + \frac{11}{2!}s(s-1) - \frac{18}{6}s(s-1)(s-2)\\
&= 4 - \frac{35}{2}s + \frac{29}{2}s^2 - 3s^3
\end{aligned}$$

Pour le calcul de $P(s)$ en $x = 3/2$, on a $s = (x - x_0)/h = x - 1 = (3/2) - 1 = 1/2$, donc,

$$\begin{aligned}
P(1/2) &= 4 - (35/2)(1/2) + (29/2)(1/2)^2 - (3)(1/2)^3\\
&= -3/2
\end{aligned}$$

V. Méthode de Newton pour les différences divisées.

A l'aide de la méthode de Newton pour les différences divisées,

1. Trouver un polynôme de degré trois passant par les points suivants : $(1,4),\ (2,-2),\ (3,3),\ (4,1)$.
2. Avec ce polynôme, calculer le polynôme de degré quatre passant par les points suivants : $(1,4),\ (2,-2),\ (3,3),\ (4,1),\ (5,1)$.

Réponse

1. Le tableau des différences divisées s'écrit (cf. Notes de Cours, Chapitre 4, page 25),

x	y	$\Delta[x_0,x_1]$	$\Delta^2[x_0,x_1,x_2]$	$\Delta^3[x_0,x_1,x_2,x_3]$
1	4			
		-6		
2	-2		11/2	
		5		-3
3	3		-7/2	
		-2		
4	1			

On a donc,

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= y_0 + \Delta[x_0,x_1](x-x_0) + \Delta^2[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \Delta^3[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
P_3(x) &= 4 + (-6)(x-1) + (11/2)(x-1)(x-2) + (-3)(x-1)(x-2)(x-3)\\
P_3(x) &= 39 - (111/2)x + (47/2)x^2 - 3x^3
\end{aligned}$$

2. On a la relation suivante,

$$P_4(x) = P_3(x) + \Delta^4[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

avec,

$$\Delta^4[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{\Delta^3[x_1, x_2, x_3, x_4] - \Delta^3[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

On a le nouveau tableau des différences divisées suivant

x	y	$\Delta[x_0, x_1]$	$\Delta^2[x_0, x_1, x_2]$	$\Delta^3[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$\Delta^4[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
1	4				
		-6			
2	-2		11/2		
		5		-3	
3	3		-7/2		9/8
		-2		3/2	
4	1		1		
		0			
5	1				

On a donc,

$$P_4(x) = P_3(x) + (9/8)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$