DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 6

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Calcul de spline cubique naturelle

Déterminer la fonction spline cubique naturelle passant par les points suivants,

x	1	2	3	4	5
y	4	-2	3	1	1

Réponse

On a $s_1 = s_5 = 0$ (spline cubique *naturelle*) et pour $i = 2, 3, 4$, le système suivant,

$$\left\{ \begin{array}{llllll} h_1 s_1 & +2(h_1+h_2)s_2 & +h_2 s_3 & = & 6(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}) \\ h_2 s_2 & +2(h_2+h_3)s_3 & +h_3 s_4 & = & 6(\frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2}) \\ h_3 s_3 & +2(h_3+h_4)s_4 & +h_4 s_5 & = & 6(\frac{y_5-y_4}{h_4} - \frac{y_4-y_3}{h_3}) \end{array} \right.$$

On a aussi,

$$\left\{ \begin{array}{lll} h_1 & = 2-1 & = 1 \\ h_2 & = 3-2 & = 1 \\ h_3 & = 4-3 & = 1 \\ h_4 & = 5-4 & = 1 \end{array} \right.$$

En remplacant ces valeurs dans le système précédent, on trouve,

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 4s_2 & +s_3 & & = & 66 \\ s_2 & +4s_3 & +s_4 & = & -42 \\ & +s_3 & +4s_4 & = & 12 \end{array} \right.$$

ou encore le système tridiagonal suivant

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ -42 \\ 12 \end{pmatrix}$$

que l'on résoud facilement par élimination de Gauss[1], et on trouve

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (585/28) \\ -(123/7) \\ (207/28) \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_1 & = 0 \\ s_2 & = \frac{585}{28} \\ s_3 & = -\frac{123}{7} \\ s_4 & = \frac{207}{28} \\ s_5 & = 0 \end{array} \right.$$

[1] Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, pages 55.

Avec ceci, on peut calculer les coefficients du polynôme,

$$\begin{aligned}
a_1 = (s_2 - s_1)/6h_1 &= 3.48 \\
a_2 = (s_3 - s_2)/6h_2 &= -6.41 \\
a_3 = (s_4 - s_3)/6h_3 &= 4.16 \\
a_4 = (s_5 - s_4)/6h_4 &= -1.23
\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}
b_1 = (s_1/2) &= 0 \\
b_2 = (s_2/2) &= 10.44 \\
b_3 = (s_3/2) &= -8.78 \\
b_4 = (s_4/2) &= 3.69
\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}
c_1 = (y_2 - y_1)/h_1 - \frac{h_1(2s_1 + s_2)}{6} &= -9.48 \\
c_2 = (y_3 - y_2)/h_2 - \frac{h_2(2s_2 + s_3)}{6} &= 0.96 \\
c_3 = (y_4 - y_3)/h_3 - \frac{h_3(2s_3 + s_4)}{6} &= 2.63 \\
c_4 = (y_5 - y_4)/h_4 - \frac{h_4(2s_4 + s_5)}{6} &= -2.46
\end{aligned}$$

De même, on a,

$$\begin{aligned}
d_1 = y_1 &= 4 \\
d_2 = y_2 &= -2 \\
d_3 = y_3 &= 3 \\
d_4 = y_4 &= 1
\end{aligned}$$

Donc, on obtient les quatres polynômes suivants

$$\begin{aligned}
Q_1(x) &= 3.48(x-1)^3 - 9.48(x-1) + 4 \\
Q_2(x) &= -6.41(x-2)^3 + 10.44(x-2)^2 + 0.96(x-2) - 2 \\
Q_3(x) &= 4.16(x-3)^3 - 8.78(x-3)^2 + 2.63(x-3) + 3 \\
Q_4(x) &= -1.23(x-4)^3 + 3.69(x-4)^2 - 2.46(x-4) + 1
\end{aligned}$$

II. Calcul de spline de Bézier

Calculer la spline de Bézier cubique passant par les points suivants,

x	1	2	3	4
y	4	-2	3	1

Réponse

La spline de Bézier est définie par la forme paramétrique suivante[2],

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{(1-u)^{n-i}\, u^i}_{\text{Polynôme de Bernstein}} \quad P_i$$

$$\text{avec,} \qquad \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\; i!} \quad \text{et} \quad P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

où n est le degré de la spline de Bézier. Donc, pour $n = 3$, on a,

$$P(u) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (1-u)^{3-i}\, u^i\, P_i = \Big(\mathrm{Bez}_{03}(u)P_0 + \mathrm{Bez}_{13}(u)P_1 + \mathrm{Bez}_{23}(u)P_2 + \mathrm{Bez}_{33}(u)P_3\Big)$$

Les différents Polynômes de Bernstein s'écrivent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bez}_{03}(u) &= \binom{3}{0} (1-u)^{3-0} u^0 = (1-u)^3 \\
\mathrm{Bez}_{13}(u) &= \binom{3}{1} (1-u)^{3-1} u^1 = 3u(1-u)^2 \\
\mathrm{Bez}_{23}(u) &= \binom{3}{2} (1-u)^{3-2} u^2 = 3u^2(1-u) \\
\mathrm{Bez}_{33}(u) &= \binom{3}{3} (1-u)^{3-3} u^3 = u^3
\end{aligned}$$

On obtient le polynôme suivant

$$P(u) = (1-u)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3u(1-u)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 3u^2(1-u) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + u^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et on obtient la représentation paramétrique suivante,

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3u \\ 4 - 18u + 33u^2 - 18u^3 \end{pmatrix}$$

[2] Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, pages 56-58.

III. Méthode matricielle pour le calcul des splines de Bézier

Calculer la spline de Bézier cubique passant par les points suivants en utilisant la méthode matricielle[3],

x	1	2	3	4
y	4	-2	3	1

Réponse

La représentation matricielle des courbes de Bézier cubique peut s'écrire,

$$\begin{aligned} P(u) &= u^t\, M_{\text{BEZ}}\, p, \\ P(u) &= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans notre cas, on a,

$$\begin{aligned} P(u) &= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ P(u) &= \begin{pmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et on obtient la représentation paramétrique suivante,

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3u \\ 4 - 18u + 33u^2 - 18u^3 \end{pmatrix}$$

IV. Identification de courbe spline (1)

On définit l'expression,

$$(x-\xi)_+^3 = \begin{cases} (x-\xi)^3, & \text{si} \quad x > \xi \\ 0, & \text{si} \quad x \leq \xi \end{cases}$$

Soit maintenant $a = x_0$, $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, $x_3 = b$ et on définit,

$$S(x) = c_1(x-x_1)_+^3 + c_2(x-x_2)_+^3 \quad \text{où} \quad x \in [a,b]$$

[3]Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, page 63.

Montrer que S est une spline cubique.

Réponse

On va montrer que la continuité de S, S' et S'' est respectée.

- Sur $[x_0, x_1]$, on a $S(x) = 0$, $S'(x) = 0$ et $S''(x) = 0$
- Sur $[x_1, x_2]$, on a $S(x) = c_1(x - x_1)^3$, et donc $S'(x) = 3c_1(x - x_1)^2$ et $S''(x) = 6c_1(x - x_1)$
- Sur $[x_2, x_3]$, on a $S(x) = c_1(x - x_1)^3 + c_2(x - x_2)^3$, et donc $S'(x) = 3c_1(x - x_1)^2 + 3c_2(x - x_2)^2$ et $S''(x) = 6c_1(x - x_1) + 6c_2(x - x_2)$

On a,

$$S(x_1-) = s(x_1+) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(x_2-) = S(x_2+) = c_1(x_2 - x_1)^3$$

De même,

$$S'(x_1-) = S'(x_1+) = 0 \qquad \text{et} \qquad S'(x_2-) = S'(x_2+) = 3c_1(x_2 - x_1)^2$$

De même,

$$S''(x_1-) = S''(x_1+) = 0 \qquad \text{et} \qquad S''(x_2-) = S''(x_2+) = 6c_1(x_2 - x_1)$$

Les fonctions S, S' et S'' sont continues au points x_1 et x_2.

Donc les fonctions S, S' et S'' sont continues sur les intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$.

Donc la fonction S est une spline cubique.

V. Identification de courbe spline (2)

Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, un polynôme cubique sur $[a, b]$, et $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n = b$. Montrer que la fonction définit par,

$$S(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j (x - x_j)_+^3$$

est une spline cubique sur $[x_i, x_{i+1}]$, pour chaque $i = 0, 1, \ldots, n-1$, sachant que l'on définit,

$$(x - \xi)_+^3 = \begin{cases} (x - \xi)^3, & \text{si} \quad x > \xi \\ 0, & \text{si} \quad x \leq \xi \end{cases}$$

Réponse

On va montrer que la continuité de S, S' et S'' est respectée. Sur $[x_{i-1}, x_i]$, on a,

$$\begin{aligned}
S(x) &= S_{i-1}(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j)^3 \\
S'(x) &= S'_{i-1}(x) = P'(x) + 3\sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j)^2 \\
S''(x) &= S''_{i-1}(x) = P''(x) + 6\sum_{j=1}^{i-1} c_j (x - x_j)
\end{aligned}$$

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a,

$$\begin{aligned}
S(x) &= S_{i}(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{i} c_j (x - x_j)^3 \\
S'(x) &= S'_{i}(x) = P'(x) + 3\sum_{j=1}^{i} c_j (x - x_j)^2 \\
S''(x) &= S''_{i}(x) = P''(x) + 6\sum_{j=1}^{i} c_j (x - x_j)
\end{aligned}$$

En utilisant ces équations, on a,

$$\begin{aligned}
S(x_i-) &= S_{i-1}(x_i) = P(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j)^3 = S_i(x_i) = S(x_i+) \\
S'(x_i-) &= S'_{i-1}(x_i) = P'(x_i) + 3\sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j)^2 = S'_i(x_i) = S'(x_i+) \\
S''(x_i-) &= S''_{i-1}(x_i) = P''(x_i) + 6\sum_{j=1}^{i-1} c_j (x_i - x_j) = S''_i(x_i) = S''(x_i+)
\end{aligned}$$

Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n-1$, S, S', S'' sont continues aux points x_i. Donc S est une spline cubique sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour chaque $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ce qui implique que S est une spline cubique.