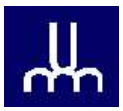

DIRO
IFT 2425

INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Mesure d'incertitude (15 pts)

Calculer l'erreur absolue et relative sur la durée des oscillations d'un pendule simple de longueur l. La période est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

si π= 3.141 à 10^{-3} près (i.e., $\Delta\pi = 10^{-3}$), $l = 1$ m à 10^{-3} près, et $g = 9.81$ ms^{-2} à 10^{-2} près. Donner l'approximation de T et arrondir au nombre de cse adéquat.

II. Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (25 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine r de l'équation

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0.$$

1. **Méthode du point fixe**.
   (a) En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, montrer que l'intervalle $J_1 = [0, 1]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique est assurée.
   (b) Déterminer analytiquement un majorant de $|r_n - r|$, où r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe.
   (c) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.
2. **Méthode de Newton-Raphson**.
   (a) Soit $g_2(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de cette équation. Donner $g_2(x)$.
   (b) Montrer que pour $x > 0$, on a l'inégalité suivante

$$|g_2'(x)| \leq 1.125\,|f(x)|\,.$$

   (c) Montrer que l'on a une solution unique sur l'intervalle $J_2 = [0.5, 0.75]$ et que le choix de cet intervalle permet d'assurer la convergence de la méthode de Newton.
   (d) Trouver analytiquement une majoration du type

$$|r_{n+1} - r| \leq K\,|r_{n+1} - r_n|\,.$$

   (e) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-6} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.

III. Convergence linéaire et quadratique (15 pts)

Soit deux méthodes itératives dont la constante asymptotique est $C = 0.75$ et convergeant linéairement pour la première et quadratiquement pour la seconde. Calculer le nombre d'itération minimal pour que l'erreur d'approximation n'excède pas 10^{-8} dans les deux cas sachant que l'erreur à la première itération n'excède pas 0.5 (i.e., $e_0 = 0.5$).

IV. Norme de Matrice (5 pts)

Montrer que pour une matrice symétrique A, on a l'égalité suivante

$$\text{cond(A)}_1 = \text{cond(A)}_\infty.$$

V. Factorisation P^tLU avec élimination Gaussienne (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit P^tLU ou P est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et pivotage partiel.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ pour $b = (1, 2, 3)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Interpolation de lagrange et Newton (20 pts)

Soit les points suivants

x_k	0	1	4	6
y_k	1	-1	1	-1

1. Appliquez la formule de Lagrange pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.
2. Appliquez la formule de Newton pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.