DIRO
IFT 2425

INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I	Mesure d'incertitude.
II	Méthode du point fixe et de Newton-Raphson.
III	Convergence linéaire et quadratique.
IV	Norme de Matrice.
V	Factorisation P^tLU avec élimination Gaussienne.
VI	Interpolation de lagrange et Newton.

I. Mesure d'incertitude (15 pts)

Calculer l'erreur absolue et relative sur la durée des oscillations d'un pendule simple de longueur l. La période est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

si π= 3.141 à 10^{-3} près (i.e., $\Delta\pi = 10^{-3}$), $l = 1$ m à 10^{-3} près, et $g = 9.81$ ms^{-2} à 10^{-2} près. Donner l'approximation de T et arrondir au nombre de cse adéquat.

II. Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (25 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine r de l'équation

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0.$$

1. **Méthode du point fixe**.
   (a) En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, montrer que l'intervalle $J_1 = [0, 1]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique est assurée.
   (b) Déterminer analytiquement un majorant de $|r_n - r|$, où r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe.
   (c) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.
2. **Méthode de Newton-Raphson**.
   (a) Soit $g_2(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de cette équation. Donner $g_2(x)$.
   (b) Montrer que pour $x > 0$, on a l'inégalité suivante
   $$|g_2'(x)| \leq 1.125\,|f(x)|\,.$$
   (c) Montrer que l'on a une solution unique sur l'intervalle $J_2 = [0.5, 0.75]$ et que le choix de cet intervalle permet d'assurer la convergence de la méthode de Newton.
   (d) Trouver analytiquement une majoration du type
   $$|r_{n+1} - r| \leq K\,|r_{n+1} - r_n|\,.$$
   (e) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-6} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.

III. Convergence linéaire et quadratique (15 pts)

Soit deux méthodes itératives dont la constante asymptotique est $C = 0.75$ et convergeant linéairement pour la première et quadratiquement pour la seconde. Calculer le nombre d'itération minimal pour que l'erreur d'approximation n'excède pas 10^{-8} dans les deux cas sachant que l'erreur à la première itération n'excède pas 0.5 (i.e., $e_0 = 0.5$).

IV. Norme de Matrice (5 pts)

Montrer que pour une matrice symétrique A, on a l'égalité suivante

$$\operatorname{cond}(\mathrm{A})_1 = \operatorname{cond}(\mathrm{A})_\infty.$$

V. Factorisation P^tLU avec élimination Gaussienne (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit P^tLU ou P est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et pivotage partiel.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ pour $b = (1, 2, 3)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI. Interpolation de lagrange et Newton (20 pts)

Soit les points suivants

x_k	0	1	4	6
y_k	1	-1	1	-1

1. Appliquez la formule de Lagrange pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.
2. Appliquez la formule de Newton pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.