



DIRO  
IFT 2425

## DÉMONSTRATION N° 7

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384.

[http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/](http://www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2425/)

*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

## CORRECTION DE L'INTRA

I .....	Mesure d'incertitude.
II .....	Méthode du point fixe et de Newton-Raphson.
III .....	Convergence linéaire et quadratique.
IV .....	Norme de Matrice.
V .....	Factorisation $P^tLU$ avec élimination Gaussienne.
VI .....	Interpolation de lagrange et Newton.

## I. Mesure d'incertitude (15 pts)

Calculer l'erreur absolue et relative sur la durée des oscillations d'un pendule simple de longueur  $l$ . La période est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

si  $\pi = 3.141$  à  $10^{-3}$  près (i.e.,  $\Delta\pi = 10^{-3}$ ),  $l = 1$  m à  $10^{-3}$  près, et  $g = 9.81$  ms $^{-2}$  à  $10^{-2}$  près. Donner l'approximation de  $T$  et arrondir au nombre de cse adéquat.

### Réponse

On a pour valeur approchée

$$T = \frac{6,282}{\sqrt{9.81}} \approx 2.006 \text{ s},$$

On obtient la différentielle suivante

$$\Delta T = \left| 2\sqrt{\frac{l}{g}} \right| \Delta\pi + \left| \frac{\pi}{\sqrt{lg}} \right| \Delta l + \left| -\frac{\pi}{g} \sqrt{\frac{l}{g}} \right| \Delta g.$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \Delta T &= \left| 2\sqrt{\frac{1}{9.81}} \right| 10^{-3} + \left| \frac{3.141}{\sqrt{9.81}} \right| 10^{-3} + \left| -\frac{3.141}{9.81} \sqrt{\frac{1}{9.81}} \right| 10^{-2}, \\ \Delta T &\approx 6.39 \cdot 10^{-4} + 1.00 \cdot 10^{-3} + 1.01 \cdot 10^{-3}, \\ \Delta T &\approx 2.65 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

On obtient aussi l'erreur relative

$$\frac{\Delta T}{T} = 1.32 \cdot 10^{-3}.$$

On trouve donc (2 cse après la virgule sont conservés) :

$$T = 2.00 \text{ s} \quad \text{avec} \quad \Delta T = 2.65 \cdot 10^{-3}.$$

## II. Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (25 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine  $r$  de l'équation

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0.$$

### 1. Méthode du point fixe.

- (a) En remarquant que l'équation proposée est équivalente à  $g_1(x) = x$  avec  $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , montrer que l'intervalle  $J_1 = [0, 1]$  est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique est assurée.
- (b) Déterminer analytiquement un majorant de  $|r_n - r|$ , où  $r_n$  désigne la valeur approchée, à la  $n$ ème itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe.
- (c) En déduire une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-3}$  près en partant de  $r_0 = 1$  et arrondir au nombre adéquat de cse.

## 2. Méthode de Newton-Raphson.

- (a) Soit  $g_2(x)$ , la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de cette équation. Donner  $g_2(x)$ .
- (b) Montrer que pour  $x > 0$ , on a l'inégalité suivante

$$|g_2'(x)| \leq 1.125 |f(x)|.$$

- (c) Montrer que l'on a une solution unique sur l'intervalle  $J_2 = [0.5, 0.75]$  et que le choix de cet intervalle permet d'assurer la convergence de la méthode de Newton.
- (d) Trouver analytiquement une majoration du type

$$|r_{n+1} - r| \leq K |r_{n+1} - r_n|.$$

- (e) En déduire une valeur approchée de  $r$  à  $10^{-6}$  près en partant de  $r_0 = 1$  et arrondir au nombre adéquat de cse.

## Réponse

1.

a. L'étude des variations de la fonction  $f(x)$  sur  $[0, 1]$  montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle. De plus, on  $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1$ . Il existe donc une racine  $r$  unique dans cet intervalle. Les dérivées premières et secondes de  $g_1(x)$  s'écrivent

$$g_1' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad g_1'' = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

Il est clair que pour tout  $x \in J_1$ , on a  $|g_1'(x)| < 1$  (car :  $2x \leq 1+x^2 \leq (1+x^2)^2$ ). Donc la convergence est assurée.

b. De manière plus précise, en étudiant les variations de  $g_1'(x)$ , on voit que :  $\forall x \in J_1, |g_1'(x)| < 0.65$ . En effet, on a,

$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$g_1''(x)$	-	0	+
$g_1'(x)$	0	$\searrow$ $m$ $\nearrow$	-0.5

avec  $m = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx -0.6495$ . On a donc la majoration suivante de l'erreur commise en prenant la valeur approchée  $r_n$  de  $r$  (cf. Cours).

$$|r_n - r| \leq 0.65^n.$$

c. En utilisant la précédente majoration, on aura  $|r_n - r| < 10^{-3}$ , si  $0.65^n < 10^{-3}$ , ou  $n > \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(0.65)}$ , soit pour  $n \geq 17$ . On obtient,

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 1, \\
 r_1 &= 0.5, \\
 r_2 &= 0.8, \\
 r_3 &= 0.60, \\
 r_4 &= 0.72, \\
 r_5 &= 0.65, \\
 r_6 &= 0.70, \\
 r_7 &= 0.67, \\
 r_8 &= 0.68, \\
 r_9 &= 0.67, \\
 r_{10} &= 0.685, \\
 r_{11} &= 0.680, \\
 r_{12} &= 0.683, \\
 r_{13} &= 0.681, \\
 r_{14} &= 0.6828, \\
 r_{15} &= 0.6820, \\
 r_{16} &= 0.6825, \\
 r_{17} &= 0.6822.
 \end{aligned}$$

On a  $|r_n - r| < 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-2}$  et donc le résultat s'exprime avec 2 cse après la virgule par  $r_{17} = 0.68$ .

**2.**

**a.** On a

$$g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}.$$

**b.**  $g_2(x)$  a pour dérivée

$$g_2'(x) = \frac{6x(x^3 + x - 1)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{6x}{(3x^2 + 1)^2} f(x).$$

La fonction  $h(x) = \frac{6x}{(3x^2+1)^2}$  atteint un maximum égal à 1.125 (pour  $x = \frac{1}{3}$ ), par suite, pour  $x > 0$ ,

$$|g_2'(x)| \leq 1.125 |f(x)|.$$

**c.** L'étude des variations de la fonction  $f(x)$  sur  $J_2 = [0.5, 0.75]$  montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle. De plus, on  $f(0.5) = -0.375$  et  $f(0.75) = 0.171875$ . Il existe donc une racine  $r$  unique dans cet intervalle. On a sur  $J_2$  :

$$-0.375 \leq f(x) \leq 0.172,$$

et par suite,

$$|g_2'(x)| < 0.43,$$

ce qui assure la convergence de cette méthode vers une solution unique.

d. Par suite, on obtient,

$$\frac{1}{|1 - g'_2(x)|} < 1.76 \quad \text{sur } J_2.$$

On obtient une majoration du type (cf. Démo 2, exercice 2) :

$$|r_{n+1} - r| \leq 1.76 |r_{n+1} - r_n|.$$

e. En utilisant la précédente majoration, on obtient,

$$\begin{aligned} r_0 &= 1, \\ r_1 &= 0.75, \\ r_2 &= 0.6860465116, \\ r_3 &= 0.6823395826, \\ r_4 &= 0.6823278039, \\ r_5 &= 0.6823278038. \end{aligned}$$

On doit arrêter à la cinquième itération (car  $|r_5 - r| \leq 1.76 |r_5 - r_4| = 1.76 \times 10^{-10} < 10^{-6}$ ) et on trouve, en arrondissant au nombre de cse adéquat  $r_5 = 0.68232$ .

### III. Convergence linéaire et quadratique (15 pts)

Soit deux méthodes itératives dont la constante asymptotique est  $C = 0.75$  et convergeant linéairement pour la première et quadratiquement pour la seconde. Calculer le nombre d'itération minimal pour que l'erreur d'approximation n'excède pas  $10^{-8}$  dans les deux cas sachant que l'erreur à la première itération n'excède pas 0.5 (i.e.,  $e_0 = 0.5$ ).

#### Réponse

On a pour la première et la deuxième méthode respectivement,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 0.75, \quad \text{et} \quad \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \approx 0.75.$$

Pour la méthode de convergence linéaire, on a,

$$|e_n| \approx 0.75 |e_{n-1}| \approx (0.75)^2 |e_{n-2}| \approx \dots \approx (0.75)^n |e_0|.$$

Pour la méthode de convergence quadratique, on a

$$|e_n| \approx 0.75 |e_{n-1}|^2 \approx (0.75)(0.75 |e_{n-2}|^2)^2 = (0.75)^3 |e_{n-2}|^4 \approx \dots \approx (0.75)^{2n-1} |e_0|^{2n}.$$

L'énoncé nous demande de supposer que  $|e_0| = 0.5$  dans les deux cas. Pour la méthode de convergence linéaire on a,

$$e_n = (0.75)^n(0.5) \leq 10^{-8} \quad \text{pour} \quad n \geq \frac{\ln 2 - 8 \ln 10}{\ln(0.75)} \approx 62.$$

Pour la méthode quadratique on a,

$$\begin{aligned} e_n &= (0.75)^{2n-1}(0.5)^{2n} \leq 10^{-8}, \\ e_n &= (0.75)^{-1}(0.375)^{2n} \leq 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2n &\geq \frac{\ln(0.75) - 8 \ln 10}{\ln(0.375)}, \\ n &\geq 10. \end{aligned}$$

On peut remarquer que la méthode de convergence quadratique demande beaucoup moins d'itération que la méthode de convergence linéaire.

## IV. Norme de Matrice (5 pts)

Montrer que pour une matrice symétrique  $A$ , on a l'égalité suivante,

$$\text{cond}(A)_1 = \text{cond}(A)_\infty.$$

### Réponse

Par définition, on a,

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Pour une matrice symétrique,  $A = A^t$ , et

$$\|A\|_1 = \|A^t\|_1 = \|A\|_\infty.$$

De plus on a,

$$\|A^{-1}\|_1 = \|(A^t)^{-1}\|_1 = \|(A^{-1})^t\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty.$$

Par conséquent, si la matrice est symétrique,

$$\text{cond}(A)_1 = \text{cond}(A)_\infty.$$

## V. Factorisation $P^tLU$ avec élimination Gaussienne (20 pts)

1. Décomposer la matrice  $A$  en produit  $P^tLU$  où  $P$  est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et pivotage partiel.
2. Calculer le déterminant de  $A$ .
3. Résoudre le système  $Ax = b$  pour  $b = (1, 2, 3)^t$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Réponse

1.

On intervertit la ligne 1 et la ligne 3 ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération  $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - (-2/3)\text{ligne}_1$  et  $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-1/3)\text{ligne}_1$  donne,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & (-1/3) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération  $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-1)\text{ligne}_2$  donne,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2/3) & 1 & 0 \\ (-1/3) & -1 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_U.$$

2.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P) \times \det(L) \times \det(U), \\ &= -1 \times 1 \times (-6 \times (1/3) \times 2), \\ &= 4. \end{aligned}$$

3.

On doit résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2/3) & 1 & 0 \\ (-1/3) & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par substitution avant puis arrière on trouve,  $Ly = b$  avec  $y = (3, 4, 6)^t$ , puis  $Ux = y$  avec finalement  $x = ((-15/6), -6, 3)^t$ .

## VI. Interpolation de lagrange et Newton (20 pts)

Soit les points suivants

$x_k$	0	1	4	6
$y_k$	1	-1	1	-1

1. Appliquez la formule de Lagrange pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Évaluez ensuite ce polynome pour  $x = 2, 3, 5$ .
2. Appliquez la formule de Newton pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Évaluez ensuite ce polynome pour  $x = 2, 3, 5$ .

### Réponse

1.

On trouve par Lagrange :

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{-24} - \frac{x(x-4)(x-6)}{15} + \frac{x(x-1)(x-6)}{-24} - \frac{x(x-1)(x-4)}{60}.$$

Pour l'interpolation on trouve,

$$\begin{aligned} P(2) &= -1, \\ P(3) &= 0, \\ P(5) &= 1. \end{aligned}$$

2.

Le tableau des différences divisées s'écrit,



$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1	-2		
1	-1	(2/3)	2/3	-(1/6)
4	1	-1	-1/3	
6	-1			

On obtient le polynome suivant :

$$P_3(x) = 1 - 2x + (2/3)x(x - 1) - (1/6)x(x - 1)(x - 4).$$

Pour l'interpolation on trouve la même chose que pour lagrange car le polynome de collocation de degré trois est unique.

$$\begin{aligned} P(2) &= -1, \\ P(3) &= 0, \\ P(5) &= 1. \end{aligned}$$