DIRO
IFT 2425

DÉMONSTRATION N° 8

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Chapitre 4	**Interpolation polynomiale**
I	Interpolation par la méthode des moindres carrés.
II	Interpolation par la méthode de Newton Grégory.
III	Interpolation par la méthode des moindres carrés avec changement de modèle.

I. Interpolation par la méthode des moindres carrés

Soit les points suivants :

x_k	1	2	3	4	5	6
y_k	5.04	8.12	10.64	13.18	16.20	20.04

Trouver le polynôme de degré trois passant par ces points en utilisant la méthode des moindres carrés. Interpoler en $x = 4.5$.

Réponse

On cherche le polynôme de la forme suivante,

$$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

On a le système d'équations suivant,

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} a_3 & +a_2 & +a_1 & +a_0 & = & 5.04 \\ 8a_3 & +4a_2 & +2a_1 & +a_0 & = & 8.12 \\ 27a_3 & +9a_2 & +3a_1 & +a_0 & = & 10.64 \\ 64a_3 & +16a_2 & +4a_1 & +a_0 & = & 13.18 \\ 125a_3 & +25a_2 & +5a_1 & +a_0 & = & 16.20 \\ 216a_3 & +36a_2 & +6a_1 & +a_0 & = & 20.04 \end{array}\right.$$

Ou alors le système suivant,

$$Ax = b \quad \text{avec} \quad x = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.04 \\ 8.12 \\ 10.64 \\ 13.18 \\ 16.20 \\ 20.04 \end{pmatrix}.$$

Par définition, cf. Cours, on a,

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = (A^t\,A)^{-1} A^t\,b$$

Le calcul de $A^t\,A$ nous donne,

$$A^t\,A = \begin{pmatrix} 67171 & 12201 & 2275 & 441 \\ 12201 & 2275 & 441 & 21 \\ 2275 & 441 & 91 & 21 \\ 441 & 91 & 21 & 6 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $(A^t\,A)^{-1}$ nous donne,

$$\begin{pmatrix} (5/324) & -(35/216) & (317/648) & (-7/18) \\ (-35/216) & (871/504) & (-575/108) & (13/3) \\ (317/648) & (-575/108) & (76555/4536) & (-257/18) \\ (-7/18) & (13/3) & (-257/18) & 13 \end{pmatrix}$$

Et on trouve,

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = (A^t\,A)^{-1} A^t\,b = \begin{pmatrix} 0.0767 \\ -0.701 \\ 4.61 \\ 1.06 \end{pmatrix}.$$

C'est à dire le polynôme suivant,

$$P_3(x) = 0.0767x^3 - 0.701x^2 + 4.61x + 1.06.$$

On interpole en $x = 4.5$ et on trouve $P_3(4.5) = 14.599$.

II. Interpolation par la méthode de Newton-Grégory

Des valeurs de $y(x) = \sqrt{x}$ sont listées dans la table ci-dessous.

x	y
1.0	1.00000
1.05	1.02470
1.10	1.04881
1.15	1.07238
1.20	1.09544
1.25	1.11803
1.30	1.14017

1. Calculer les différences jusqu'à l'ordre 6 et expliquer brièvement leur signification (on conservera quatre chiffres significatifs pour les différences).
2. Utiliser ces données pour interpoler $\sqrt{1.01}$ par la méthode de Newton-Grégory descendante avec un polynôme d'ordre 1, 2, 3, et 4. Pour les polynôme d'ordre 1, 2, 3, indiquer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue faite sur cette interpolation.
3. Utiliser ces données pour interpoler $\sqrt{1.28}$ par la méthode de Newton-Grégory ascendante avec un polynôme d'ordre 3.

Réponse

1.

On calcule la table des différences que l'on exprime en centaine de milliers.

x	y						
1.00	1.00000						
		2470 $\times 10^{-5}$					
1.05	1.02470		-59 $\times 10^{-5}$				
		2411 $\times 10^{-5}$		5 $\times 10^{-5}$			
1.10	1.04881		-54 $\times 10^{-5}$		-2 $\times 10^{-5}$		
		2357 $\times 10^{-5}$		3 $\times 10^{-5}$		3 $\times 10^{-5}$	
1.15	1.07238		-51 $\times 10^{-5}$		1 $\times 10^{-5}$		-6$\times 10^{-5}$
		2306 $\times 10^{-5}$		4 $\times 10^{-5}$		-3 $\times 10^{-5}$	
1.20	1.09544		-47 $\times 10^{-5}$		-2 $\times 10^{-5}$		
		2259 $\times 10^{-5}$		2 $\times 10^{-5}$			
1.25	1.11803		-45 $\times 10^{-5}$				
		2214 $\times 10^{-5}$					
1.30	1.14017						

Les données calculées peuvent être considérées comme des effets d'erreur et non comme des informations utiles à l'évaluation de la fonction racine carrée.

2.

On utilise la formule descendante de Newton-Grégory pour des abscisses équidistantes (cf. Notes de Cours, chapitre 4, page 18). On a $s = (x - x_0)/h = (1.01 - 1)/0.05 = (1/5)$, il vient,

$$\begin{aligned}
P_1(s = \frac{1}{5}) &= 1.00000 + \frac{1}{5}(0.02470) = 1.00494, \\
P_2(s = \frac{1}{5}) &= 1.00000 + \frac{1}{5}(0.02470) - \frac{2}{25}(-0.00059) = 1.0049872, \\
P_3(s = \frac{1}{5}) &= 1.00000 + \frac{1}{5}(0.02470) - \frac{2}{25}(-0.00059) + \frac{6}{125}(0.00005) = 1.0049896, \\
P_4(s = \frac{1}{5}) &= 1.00000 + \frac{1}{5}(0.02470) - \frac{2}{25}(-0.00059) + \frac{6}{125}(0.00005) - \frac{21}{625}(-0.00002) = 1.004990272.
\end{aligned}$$

Et la vraie valeur de $\sqrt{1.01}$ est 1.004987562. La meilleure approximation est donnée par $P_2(1.01)$. L'ordre de grandeur de l'erreur absolue faite sur l'interpolation, donnée par le polynôme d'ordre n, est donnée par le terme que l'on ajoute pour constituer l'interpolation donnée par le polynôme d'ordre $n+1$.

3.

Ici c'est la formule ascendante de Newton-Grégory qui est la plus convenable. Il vient $s = (x - x_0)/h = (1.28 - 1.30)/0.05 = (-2/5)$ que nous reportons dans la formule suivante (cf. complément de Cours),

$$P_n(s) = y_0 + s\Delta y_0 + \frac{s(s+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\Delta y_0^n$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
P_3(s = -2/5) &= 1.14017 - \frac{2}{5}(0.02214) - \frac{3}{25}(-0.00045) - \frac{8}{125}(0.00002) \\
&= 1.13137
\end{aligned}$$

qui est correcte à cinq décimales près.

III. Interpolation par la méthode des moindres carrés avec changement de modèle

Soit les points suivants :

t_k	1.0	1.6	2.5	5.2	6.6	8.2	9.4	11.4
$d(t_k)$	1.9	24.9	34.9	29.7	36.1	13.0	-3.1	-28.7

On suppose que ces données sont obtenues par le modèle physique suivant :

$$d(t) = \alpha + \beta \sin((\pi/10)t).$$

1. Transformer cette équation pour qu'elle soit de la forme $y = ax + b$ et calculer par les moindres carrés les coefficients a et b optimaux.
2. Interpoler $d(.)$ au point $t = 7$.

Réponse

1.

Posons,

$$\begin{aligned} b &= \alpha \\ y &= d(t) \\ x &= \sin((\pi/10)t) \\ a &= \beta \end{aligned}$$

On doit maintenant "convertir" t en x et $d(t)$ en y. On a $y = d(t)$ et $x = \sin((\pi/10)t)$.

x	0.3090	0.4818	0.7071	0.9980	0.8763	0.5358	0.1874	-0.4258
y	1.9	24.9	34.9	29.7	36.1	13.0	-3.1	-28.7

On calcule maintenant a et b par la méthode des moindres carré, on a,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.3090 & 1 \\ 0.4818 & 1 \\ 0.7071 & 1 \\ 0.9980 & 1 \\ 0.8763 & 1 \\ 0.5358 & 1 \\ 0.1874 & 1 \\ -0.4258 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.9 \\ 24.9 \\ 34.9 \\ 29.7 \\ 36.1 \\ 13.0 \\ -3.1 \\ -28.7 \end{pmatrix}}_{u}$$

Et on trouve :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (A^t\, A)^{-1} A^t\, u$$

Ou encore :

$$A^t\, A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^t\, u$$

$$\text{avec ;} \qquad A^t\, A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^t u = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

où $m = 8$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} x_i^2 &= (0.3090)^2 + \ldots + (-0.4258)^2 = 3.09501438, \\
\sum_{i=1}^{8} x_i &= (0.3090) + \ldots + (-0.4258) = 3.6696 \\
\sum_{i=1}^{8} x_i y_i &= (0.3090)(1.9) + \ldots + (-0.4258)(-28.7) = 117.14166 \\
\sum_{i=1}^{8} y_i &= (1.9) + \ldots + (-28.7) = 108.7
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.09501438 & 3.6696 \\ 3.6696 & 8.0000 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 117.14166 \\ 108.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7083312491 & -0.3240615464 \\ -0.3249115439 & 0.2740369252 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 117.14166 \\ 108.7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 47.74960826 \\ -8.272863836 \end{pmatrix}$$

et,

$$\alpha = b \approx -8.272863836$$
$$\beta = a \approx 47.74960826$$

Et on obtient :

$$d(t) \approx -8.3 + 47.7 \sin((\pi/10)t)$$

2.

Pour l'interpolation au point $t = 7$, on trouve $d(7) \approx 30.29$.