DÉMONSTRATION N^o 9

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Calcul de B-spline cubique naturelle

Calculer la B-spline cubique naturelle utilisant les points de contrôle suivants (et passant obligatoirement par le point p_0 et se terminant en p_3).

points	p_0	p_1	p_2	p_3
x	1	2	3	4
y	4	-2	3	1

Réponse

Si on veut que la B-spline cubique commence en p_0 et se termine en p_3, il faut ajouter les points de contrôle suivants, p_{-2}, p_{-1}, p_4, et p_5 tel que $p_{-2} = p_{-1} = p_0$ et $p_5 = p_4 = p_3$. Ainsi, on pourra calculer les splines B_{-1}, B_0, B_1, B_2 et B_3. On trouve[1],

$$\begin{aligned}
B_{-1}(u) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{-2} \\ p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^3}{6} & 4 - u^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0(u) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} & 3 - 3u - 3u^2 + \frac{17u^3}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1(u) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 + u & -\frac{1}{6} - \frac{u}{2} + \frac{11u^2}{2} - 3u^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[1] Cf. Notes de Cours, Chapitre 4, page 69.

$$
\begin{aligned}
B_2(u) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\\ 4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3+u-\frac{u^3}{6} & \frac{11}{6}+\frac{3u}{2}-\frac{7u^2}{2}+\frac{3u^3}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_3(u) &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2\\ p_3\\ p_4\\ p_5\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 1\\ 4 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{23}{6}+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6} & \frac{4}{3}-u+u^2-\frac{u^3}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

II. Interpolation trois dimensions

Soit le tableau ci-dessous, donnant les valeurs de $z = f(x, y)$. Interpoler f en $(x = 3.32, y = 0.51)$ avec un polynôme cubique en x et un polynôme de dimension 1 en y (trouver la région la plus appropriée pour calculer ce polynôme).

x y	0.1	0.4	0.6	0.9	1.2
1.1	1.100	0.864	0.756	0.637	0.550
3.0	8.182	6.429	5.625	4.737	4.091
3.7	12.445	9.779	8.556	7.205	6.223
5.2	24.582	19.314	16.900	14.232	12.291
6.5	38.409	30.179	26.406	22.237	19.205

Réponse

On veut la “plus petite” région pour interpoler en $(3.32, 0.51)$. On a besoin de quatre points en x et deux points en y. On considère la région suivante :

x y	0.4	0.6
1.1	0.864	0.756
3.0	6.429	5.625
3.7	9.779	8.556
5.2	19.314	16.900

On va interpoler en x en premier, on cherche un polynôme de degré trois de la forme,

$$P_3(x, y = 0.4) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Puisque les points ne sont pas équidistants, on utilisera les différences divisées.
Pour $y = 0.4$, on a,

x	z	Δ	Δ^2	Δ^3
1.1	0.864			
		2.929		
3.0	6.429		0.714	
		4.786		0
3.7	9.779		0.714	
		6.357		
5.2	19.314			

Et on obtient le polynôme d'interpolation suivant

$$P_3(x, y = 0.4) = 0.864 + 2.929(x - 1.1) + 0.714(x - 1.1)(x - 3.0)$$

et,

$$\begin{aligned} P_3(3.32, 0.4) &= 0.864 + 2.929(2.22) + 0.714(2.22)(0.32) \\ &= 7.874 \end{aligned}$$

Pour $y = 0.6$, on a,

x	z	Δ	Δ^2	Δ^3
1.1	0.756			
		2.563		
3.0	5.625		0.625	
		4.187		0
3.7	8.556		0.625	
		5.563		
5.2	16.9			

Et on obtient le polynôme d'interpolation suivant,

$$P_3(x, y = 0.6) = 0.756 + 2.563(x - 1.1) + 0.625(x - 1.1)(x - 3.0)$$

et,

$$\begin{aligned} P_3(3.32, 0.6) &= 0.756 + 2.563(2.22) + 0.625(2.22)(0.32) \\ &= 6.89 \end{aligned}$$

Maintenant pour x fixé, i.e., pour $x = 3.32$, on a

y	$z = f(x, y)$	Δ
0.4	7.874	
		-4.92
0.6	6.89	

Et on obtient le polynôme d'interpolation suivant

$$P_1(x = 3.32, y) = 7.874 - 4.92(y - 0.4)$$

et,

$$\begin{aligned} P_1(x = 3.32, y = 0.51) &= 7.874 - 4.93(0.11) \\ &= 7.333 \end{aligned}$$

Donc le résultat est le suivant $P(3.32, 0.51) = 7.333$.

III. Dérivation numérique

On donne le théorème suivant :

> Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et c_1, c_2, deux constantes positives non nulles. Alors, $\forall x_1, \forall x_2 \in [a, b]$, il existe, $\xi \in [x_1, x_2]$ tel que
>
> $$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}$$

En vous aidant de ce théorème et le développement de Taylor de la fonction f au voisinage de $x = x_0$, démontrer que

$$f'_0 = f'(x_0) = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$

avec f, une fonction de classe C^2.

Réponse

Par le développement de Taylor de la fonction f au voisinage de $x = x_0$, on a

$$\begin{aligned}
f_2 &= f_0 + 2hf'_0 + \frac{4h^2}{2} f''_0 + \frac{8h^3}{6} f'''_0 + \frac{16h^4}{24} f_0^{[4]} + \frac{32h^5}{120} f^{[5]}(\xi_1) && (1) \\
f_1 &= f_0 + hf'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 + \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f_0^{[4]} + \frac{h^5}{120} f^{[5]}(\xi_2) && (2) \\
f_{-1} &= f_0 - hf'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 - \frac{h^3}{6} f'''_0 + \frac{h^4}{24} f_0^{[4]} - \frac{h^5}{120} f^{[5]}(\xi_3) && (3) \\
f_{-2} &= f_0 - 2hf'_0 + \frac{4h^2}{2} f''_0 - \frac{8h^3}{6} f'''_0 + \frac{16h^4}{24} f_0^{[4]} - \frac{32h^5}{120} f^{[5]}(\xi_4) && (4)
\end{aligned}$$

En soustrayant l'équation (2) de l'équation (3), on obtient,

$$f_1 - f_{-1} \quad = \quad 2hf_0' + \frac{h^3}{3}f_0''' + \frac{h^5}{120}f^{[5]}(\xi_2) + \frac{h^5}{120}f^{[5]}(\xi_3)$$

En utilisant le théorème de l'énoncé, $\exists \xi' \in [\xi_2\ \xi_3]$ tel que $\frac{1}{120}f^{[5]}(\xi_2) + \frac{1}{120}f^{[5]}(\xi_3) = \frac{1}{60}f^{[5]}(\xi')$, donc

$$f_1 - f_{-1} = 2hf_0' + \frac{h^3}{3}f_0''' + \frac{h^5}{60}f^{[5]}(\xi')$$

d'où

$$f_0' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}f_0''' + \frac{h^4}{120}f^{[5]}(\xi') \tag{5}$$

En soustrayant l'équation (1) de l'équation (4) et en utilisant le théorème de l'énoncé, on obtient

$$f_2 - f_{-2} \quad = \quad 4hf_0' + \frac{16h^3}{6}f_0''' + \frac{32h^5}{60}f^{[5]}(\xi'')$$

d'où

$$f_0' = \frac{f_2 - f_{-2}}{4h} - \frac{4h^2}{6}f_0''' - \frac{16h^4}{60}f^{[5]}(\xi'') \tag{6}$$

Maintenant, en multipliant l'équation (5) par 4 et en lui soustrayant l'équation (6), on trouve

$$3f_0' \quad = \quad \frac{8f_1 - 8f_{-1} - f_2 + f_{-2}}{4h} + \frac{h^4}{30}\Big(f^{[5]}(\xi') + 8f^{[5]}(\xi'')\Big)$$

En utilisant le théorème de l'énoncé $\exists \xi \in [\xi'\ \xi'']$ tel que $9f^{[5]}(\xi) = f^{[5]}(\xi') + 8f^{[5]}(\xi'')$, donc

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + \frac{h^4}{10}f^{[5]}(\xi)$$

Donc

$$f_0' = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4)$$