DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 1

Méthode de Newton & Fractales

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthode de Newton

Le principal intérêt de la loi de distribution de Weibull réside dans sa flexibilité. Ainsi, pour certaines valeurs d'un de ses paramètres (le paramètre de forme c), on retrouve la loi exponentielle ($c = 1$) et la loi de Rayleigh ($c = 2$). Cette propriété explique l'utilisation qu'en font les statisticiens pour modéliser des échantillons de variables aléatoires exponentielles dont les critères de dépendances ne sont pas pleinement vérifiés.

En traitement d'image, cette flexibilité est aussi particulièrement intéressante pour modéliser la distribution du bruit de speckle dans une image SONAR [1], ou des niveaux de gris d'une images RADAR de la surface de la mer, ou encore pour modéliser la norme du gradient des niveaux de gris associé aux contours d'une image [2]. La loi de distribution de Weibull est définie par :

$$\mathcal{W}(y; c, \alpha) = \frac{c}{\alpha}\Big(\frac{y}{\alpha}\Big)^{c-1} \cdot \exp\Big(-\frac{y^c}{\alpha^c}\Big)$$

avec $y > 0$, $\alpha > 0$ et $c > 0$. α et c sont respectivement un paramètre d'*échelle* et de *forme* strictement positifs. Nous avons représenté en Fig. 1 le tracé de cette loi pour différentes valeurs du facteur de forme c.

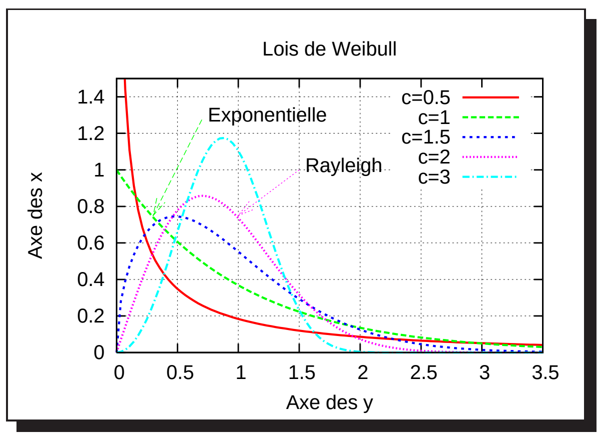

FIG. 1 – Lois de Weibull pour différentes valeurs du facteur de forme c (dans cet exemple, $\alpha = 1$)

La méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) permet d'obtenir une estimation du vecteur de paramètres $\Phi_y = (\alpha, c)$ pour un échantillon y donné (c'est-à-dire pour un ensemble de N valeurs aléatoires y_i suivant la distribution de Weibull). Si on suppose l'indépendance des différentes variables aléatoires y_i de l'échantillon y, la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\mathcal{L}(\Phi_y) = P(y/\Phi_y) = \Big(\frac{c}{\alpha^c}\Big)^N \prod_{i=1}^{N} \Big[y_i^{(c-1)} \exp\Big(-\frac{y_i^c}{\alpha^c}\Big)\Big]$$

Pour déterminer $\hat{\alpha}_{\text{MV}}$ et $\hat{c}_{\text{MV}}$ (valeurs qui maximisent la fonction de vraisemblance), on doit résoudre simultanément les deux équations suivantes $\partial \ln \mathcal{L}(\Phi_y)/\partial\alpha = 0$ et $\partial \ln \mathcal{L}(\Phi_y)/\partial c = 0$, conduisant au système d'équations

$$\begin{aligned} -N + \frac{1}{\hat{\alpha}^{\hat{c}}} \sum_{i=1}^{N} y_i^{\hat{c}} &= 0 \\ \frac{N}{\hat{c}} + \sum_{i=1}^{N} \ln y_i - N \ln \hat{\alpha} - \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{y_i}{\hat{\alpha}}\Big)^{\hat{c}} \ln\Big(\frac{y_i}{\hat{\alpha}}\Big) &= 0 \end{aligned}$$

Après simplification, on trouve une forme explicite pour α_{MV} : $\alpha_{\mathrm{MV}} = \big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{c_{\mathrm{MV}}}\big)^{\frac{1}{c_{\mathrm{MV}}}}$. Par contre on ne peut pas obtenir de forme explicite pour l'estimateur c_{MV}. En effet c_{MV} est solution de l'équation

$$f(c_{\mathrm{MV}}; y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \big(y_i^{c_{\mathrm{MV}}} \ln y_i\big)}{\sum_{i=1}^{N} y_i^{c_{\mathrm{MV}}}} - \frac{1}{c_{\mathrm{MV}}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln y_i = 0 \qquad (1)$$

qui n'a pas de solution analytique explicite et qui ne peut se résoudre que numériquement (par approximations successives) par l'une des méthodes numériques vues en cours [1,2].

Tab. 1 – Valeurs des $N = 10$ points de données y_i

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0.11	0.24	0.27	0.52	1.13	1.54	1.71	1.84	1.92	2.01

1– Implémenter[1] la relation itérative de Newton $c_{\mathrm{MV}}^{[n+1]} = g(c_{\mathrm{MV}}^{[n]}; y_i)$ qui converge vers la solution de l'équation $f(c_{\mathrm{MV}}; y_i) = 0$ lorsque l'estimée initiale (premier terme de la suite) est $c_{\mathrm{MV}}^{[0]} = 0.5$, avec comme critère d'arrêt, une tolérance sur $\hat{c}_{\mathrm{MV}}$ et une tolérance sur f de 10^{-6}. Utiliser pour la dérivée de cette relation itérative, une approximation du style : $f'(x) \approx [f(x+\epsilon) - f(x)]/\epsilon$ (avec par exemple $\epsilon \approx 10^{-5}$).

II. Fractales de Newton

Une figure fractale ou fractale (néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 à partir de la racine latine fractus, qui signifie brisé, irrégulier), est une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une homothétie interne. Dans la "théorie de la rugosité" développée par Mandelbrot, une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle.

La fractale de Newton est un ensemble frontière défini dans le plan complexe caractérisé par l'application de la méthode itérative de Newton vue en cours ($x_{[n+1]} = x_{[n]} - f(x_{[n]})/f'(x_{[n]})$) sur une fonction polynômiale $f(z)$ de variable complexe z, comme par exemple ; $f(z) = z^3 - 1$. On construit une fractale de Newton sur $f(z)$ en appliquant la méthode itérative de Newton sur cette fonction, c'est à dire, si on considère $f(z) = z^3 - 1$, en itérant la suite itérative :

$$z_{[n+1]} = z_{[n]} - \frac{z_{[n]}^3 - 1}{3\, z_{[n]}^2} \qquad (1)$$

[1]En toute rigueur (i.e., théoriquement et non plus expérimentalement comme dans ce TP), on rappelle que l'on devrait montrer tout d'abord (cf. cours), que la fonction $g(x)$ choisie dans la relation itérative $c^{[n+1]} = g(c^{[n]})$ est telle que $|g'(x)| < 1, \ \forall x \in J$, un intervalle comprenant la racine et le premier élément de la suite $c^{[0]}$ ou bien que la racine et $c^{[0]}$ ne sont pas séparé par un *extrema* de la fonction f, i.e., $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in J$.

En fonction de la valeur de départ z_0, cette suite itérative convergera (si il y a convergence) vers l'une des trois racines possibles r_k de $f(z)$, i.e. ; $r_0 = 1$, $r_1 = -1/2 + j\sqrt{3}/2$ ou $r_2 = -1/2 - j\sqrt{3}/2$ (où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$). Si cette suite itérative converge vers la racine r_k, alors $z_{[0]} = x_{[0]} + j\,y_{[0]}$ appartient à la région G_k de coordonnée $(x_{[0]}, y_{[0]})$ qui est aussi appelée le bassin d'attraction de la racine r_k. Les trois racines possibles de la convergence de la suite itérative (1) divisent donc le plan complexe en trois régions et la Figure obtenue est la Fractale de Newton pour la fonction complexe considérée. Toutefois, pour tout polynôme de degré égal au moins à 2, il existe des points pour lesquels la suite de Newton ne converge pas, c'est le cas de la frontière des bassins d attraction de chaque racine.

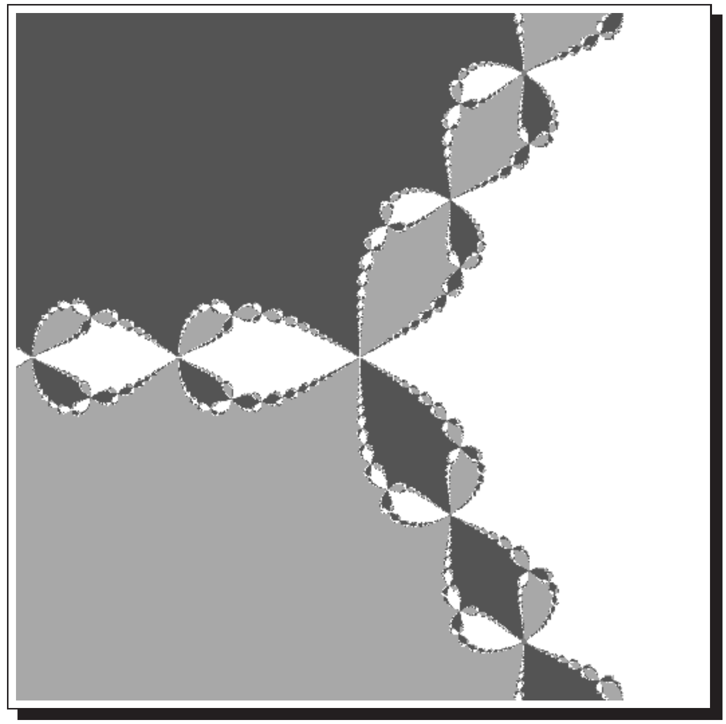

Fig. 2 – Image fractale de Newton associée au polynome complexe $f(z) = z^3 - 1$ et les trois bassins d'attraction des racines du polynôme (en blanc, gris clair et gris foncé.

La fractale de Newton présente, comme toute fractale, une apparence complexe, malgré une description simple et des auto-similarités visibles à toutes échelles. Elle suggère également que la méthode de Newton peut être très sensible aux conditions initiales et que deux points initiaux infiniment proches peuvent converger vers des racines différentes. Elle montre, enfin, que chaque point de la fractale de Newton est un point-frontière multiple, séparant chacun des n bassins d'attraction. Si deux points infiniment proches convergent vers deux racines distinctes, alors il existe un troisième point, infiniment proche également, qui converge vers la troisième racine [3].

1– Retrouver le graphe de la Fig. 2 en exprimant tout d'abord la suite itérative (1) comme deux suites itératives ; l'une associée à sa partie réelle ($x_{[n+1]} = x_{[n]} - \ldots$) et l'autre à sa partie imaginaire ($y_{[n+1]} = y_{[n]} - \ldots$). Pour chaque cellule d'un tableau $2D$, de dimension 512×512 (longueur×largeur), faites 20 itérations de ces deux suites (l'une après l'autre) en considérant comme valeur de départ $z_{[0]} = x_{[0]} + j\,y_{[0]}$ et avec

$$x_{[0]} = 3 \times (j - \text{largeur}/2.0)/(\text{largeur} - 1) \quad (2)$$
$$y_{[0]} = 3 \times (i - \text{longueur}/2.0)/(\text{longueur} - 1) \quad (3)$$

avec $''i''$ et $''j''$ correspondant respectivement au numéro de la ligne et de la colonne de la cellule, de telle façon que $x_{[0]}$ et $y_{[0]}$ varient, pour chaque cellule de ce tableau $2D$, de -1.5 à 1.5 et que la cellule centrale de ce tableau $2D$ ait pour coordonné $(0, 0)$. Remplir finalement ce tableau $2D$ en $[i][j]$ de respectivement 255, 170 ou 84 (correspondant respectivement à la couleur blanche, grise blanche et grise foncée) si la convergence à lieu respectivement pour la racine r_0, r_1 ou r_2 (attention à la comparaison entre deux flottants !). Afficher et sauver le résultat de ce tableau $2D$ sous forme d'image[2] (qui s'affichera ensuite à l'écran).

2– Retrouver l'un des deux graphe de la Fig. 3 en donnant cette fois ci à chaque cellule du tableau $2D$ un niveaux de gris (compris entre $[0 - 255]$ d'autant plus blanc (ou proche de 255) si la série converge lentement vers une solution.

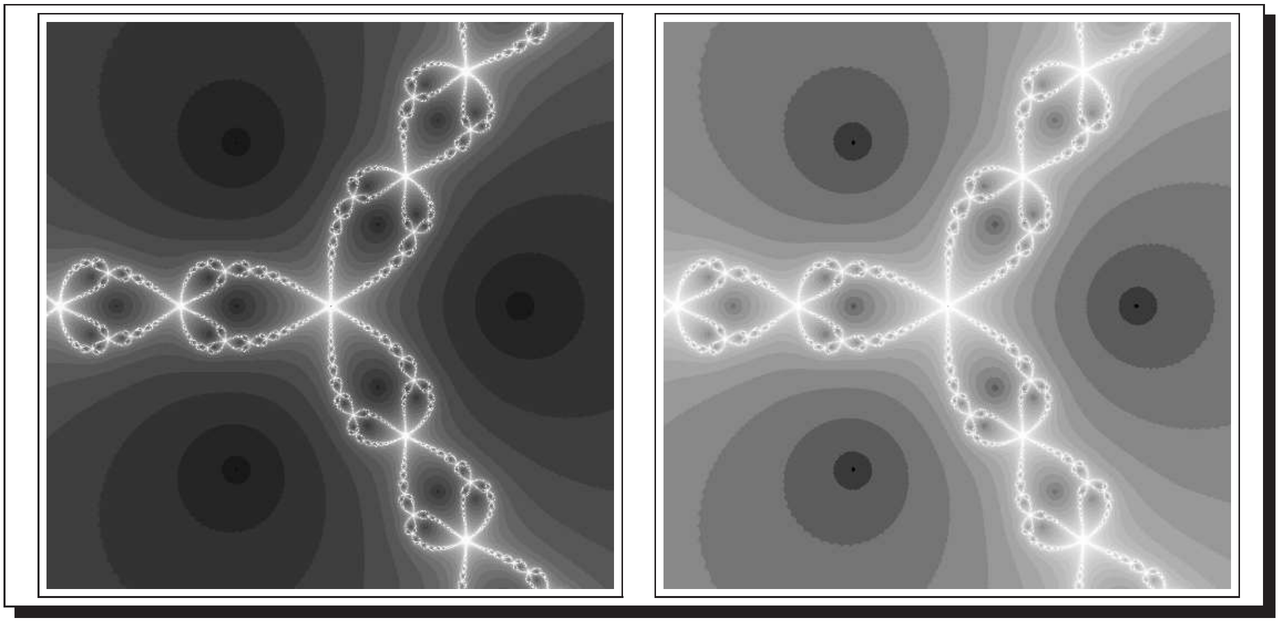

Fig. 3 – Image fractale de Newton associée au polynome complexe $f(z) = z^3 - 1$ ou chaque pixel de l'image est colorié en fonction de la (log.) rapidité de la convergence de la suite.

Réferences

[1] M. Mignotte, C. Collet, P. Pérez, and P. Bouthemy. Three-class Markovian segmentation of high resolution sonar images. *Computer Vision and Image Understanding*, 76(3) :191–204, 1999.

[2] F. Destrempes and M. Mignotte. A statistical model for contours in images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(5) :626–638, 2004.

[3] Wikipédia.

[1]

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.

[2]

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web en initialisant la variable FLAG_GRAPH=1 et remplisser le tableau $2D$ nommé Graph2D dans le programme (initialement remplie d'un dégradé de niveaux de gris (du blanc au noir)) comme une feuille de papier dessin ou vous tracerez la Figure dans l'intervalle considéré. Chaque cellule de ce tableau $2D$ de dimension 512×512 correspond à une coordonnée (x, y) et à une valeur complexe initiale $z = x + jy$ avec x et y variant de -1.5 à 1.5. Le centre de l'image correspond à la coordonnée (0.0). En utilisant la variable FLAG_GRAPH=1, le programme que je vous donne sauvera cette image au format PGM. Vous pourrez ensuite la lire avec les logiciels DISPLAY, XV ou GIMP disponible sur Linux.

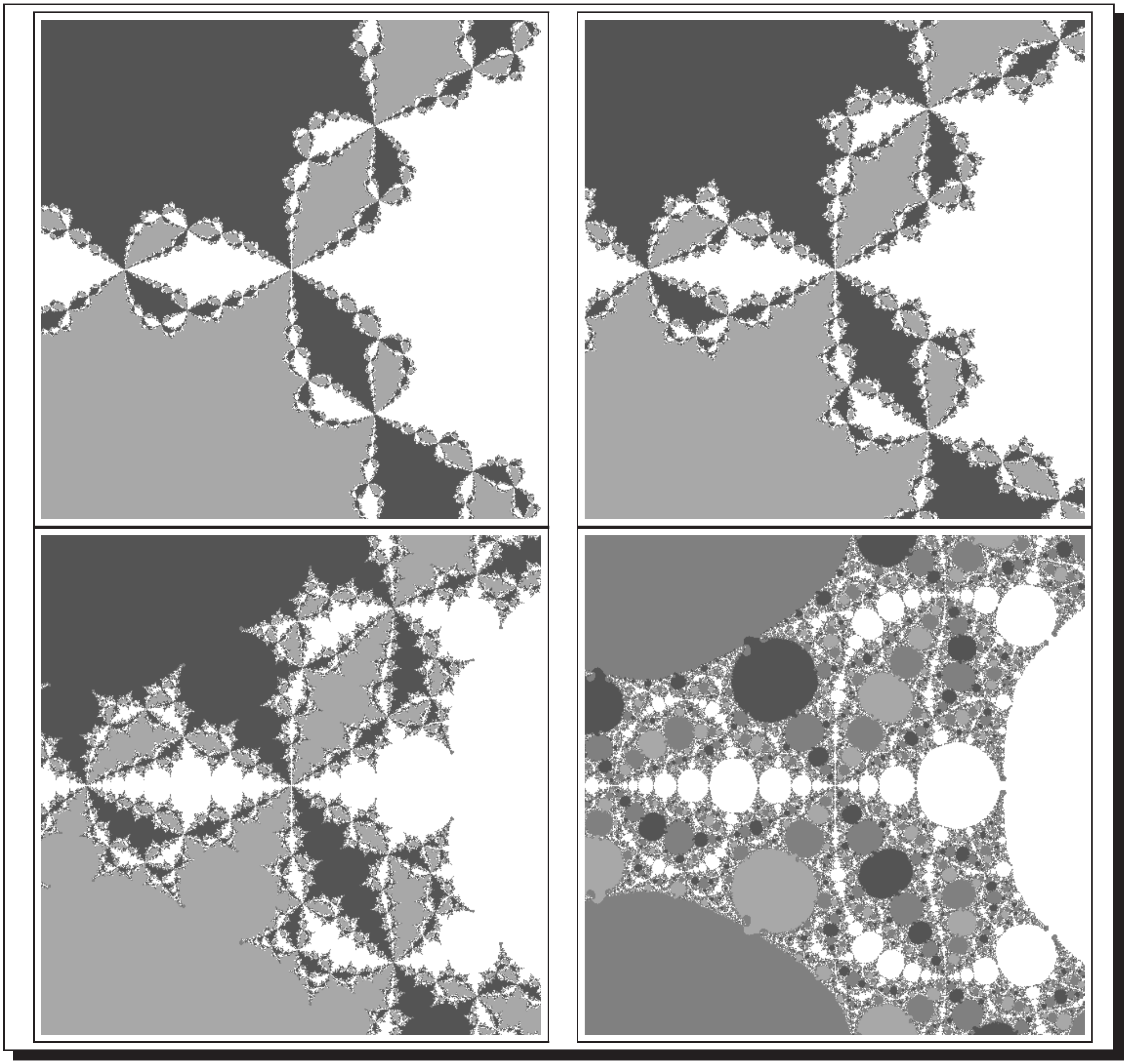

FIG. 4 – Image fractale de Newton associée à la série $z_{[n+1]} = z_{[n]} - a \cdot \frac{f(z_{[n]})}{f'(z_{[n]})}$ avec $f(z) = z^3 - 1$ et les trois bassins d'attraction des racines du polynôme et a respectivement égale à 1.5, 1.75, 1.95 et 2.1.