DIRO
IFT 2425

DEVOIR N^o 1

Point Fixe Accéléré & Fractales de Mandelbrot

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Méthodes du Point Fixe et Accélération d'Aitken

Le principal intérêt de la loi de distribution de Weibull réside dans sa flexibilité. Ainsi, pour certaines valeurs d'un de ses paramètres (le paramètre de forme c), on retrouve la loi exponentielle ($c = 1$) et la loi de Rayleigh ($c = 2$). Cette propriété explique l'utilisation qu'en font les statisticiens pour modéliser des échantillons de variables aléatoires exponentielles dont les critères de dépendances ne sont pas pleinement vérifiés.

En traitement d'images, cette flexibilité est aussi particulièrement intéressante pour modéliser la distribution du bruit de speckle dans une image SONAR [1], ou des niveaux de gris d'une image RADAR de la surface de la mer, ou encore pour modéliser la norme du gradient des niveaux de gris associé aux contours d'une image [2]. La loi de distribution de Weibull est définie par :

$$\mathcal{W}(y; c, \alpha) = \frac{c}{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{c-1} \cdot \exp\left(-\frac{y^c}{\alpha^c}\right)$$

avec $y > 0$, $\alpha > 0$ et $c > 0$. α et c sont respectivement un paramètre d'*échelle* et de *forme* strictement positifs. Nous avons représenté en Fig. 1 le tracé de cette loi pour différentes valeurs du facteur de forme c.

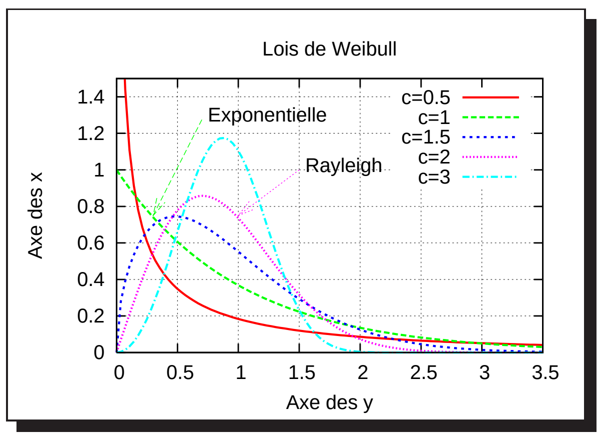

Fig. 1 – Lois de Weibull pour différentes valeurs du facteur de forme c (dans cet exemple, $\alpha = 1$)

La méthode du Maximum de Vraisemblance (MV) permet d'obtenir une estimation du vecteur de paramètres $\Phi_y = (\alpha, c)$ pour un échantillon y donné (c'est-à-dire pour un ensemble de N valeurs aléatoires y_i suivant la distribution de Weibull). Si on suppose l'indépendance des différentes variables aléatoires y_i de l'échantillon y, la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\mathcal{L}(\Phi_y) = P(y/\Phi_y) = \left(\frac{c}{\alpha^c}\right)^N \prod_{i=1}^{N}\left[y_i^{(c-1)} \exp\left(-\frac{y_i^c}{\alpha^c}\right)\right]$$

Pour déterminer $\hat{\alpha}_{\text{MV}}$ et $\hat{c}_{\text{MV}}$ (valeurs qui maximisent la fonction de vraisemblance), on doit résoudre simultanément les deux équations suivantes $\partial \ln \mathcal{L}(\Phi_y)/\partial\alpha = 0$ et $\partial \ln \mathcal{L}(\Phi_y)/\partial c = 0$,
conduisant au système d'équations

$$
\begin{aligned}
-N + \frac{1}{\hat{\alpha}^{\hat{c}}} \sum_{i=1}^{N} y_i^{\hat{c}} &= 0 \\
\frac{N}{\hat{c}} + \sum_{i=1}^{N} \ln y_i - N \ln \hat{\alpha} - \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{y_i}{\hat{\alpha}}\Big)^{\hat{c}} \ln\Big(\frac{y_i}{\hat{\alpha}}\Big) &= 0
\end{aligned}
$$

Après simplification, on trouve une forme explicite pour α_{MV} : $\alpha_{\mathrm{MV}} = \big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{c_{\mathrm{MV}}}\big)^{\frac{1}{c_{\mathrm{MV}}}}$. Par contre on ne peut pas obtenir de forme explicite pour l'estimateur c_{MV}. En effet c_{MV} est solution de l'équation

$$
f(c_{\mathrm{MV}}; y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \big(y_i^{c_{\mathrm{MV}}} \ln y_i\big)}{\sum_{i=1}^{N} y_i^{c_{\mathrm{MV}}}} - \frac{1}{c_{\mathrm{MV}}} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln y_i = 0 \qquad (1)
$$

qui n'a pas de solution analytique explicite et qui ne peut se résoudre que numériquement (par approximations successives) par l'une des méthodes numériques vues en cours [1,2].

TAB. 1 – Valeurs des $N = 10$ points de données y_i

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0.11	0.24	0.27	0.52	1.13	1.54	1.71	1.84	1.92	2.01

1– Puisque l'estimateur du MV est unique, nous savons donc que l'Équation (1) admet forcément une solution unique $\hat{c}_{\mathrm{MV}}$. Trouver expérimentalement[1] une forme adéquate transformant $f(c_{\mathrm{MV}}; y_i) = 0$ en une relation du type $c_{\mathrm{MV}} = g(c_{\mathrm{MV}}; y_i)$ puis en une suite itérative de la forme $c_{\mathrm{MV}}^{[n+1]} = g(c_{\mathrm{MV}}^{[n]}; y_i)$ qui converge vers la solution lorsque l'estimée initiale (premier terme de la suite) est $c_{\mathrm{MV}}^{[0]} = 0.1$.
Implémenter cette suite en FLOAT avec comme critère d'arrêt, une tolérance sur $\hat{c}_{\mathrm{MV}}$ et une tolérance sur f de 10^{-6}.

2– Implémenter la méthode itérative suivante (en utilisant toujours des FLOAT (en FLOAT avec une tolérance sur $\hat{c}_{\mathrm{MV}}$ et sur f de 10^{-6} et $c_{\mathrm{MV}}^{[0]} = 0.1$) qui demande à chaque itération, deux étapes de la méthode du point fixe :

Point Fixe Accéléré Par Aitken

Initialisation : $c^{[0]} = 0.1$

while *critère d'arrêt non rempli* **do**

- **1.** Calculer : $c^{[1]} = g(c^{[0]}; y_i)$
- **2.** Calculer : $c^{[2]} = g(c^{[1]}; y_i)$
- **3.** Calculer : $c^{[3]} = c^{[0]} - \frac{(c^{[1]} - c^{[0]})^2}{(c^{[2]} - 2\,c^{[1]} + c^{[0]})}$
- **4.** $c^{[0]} \leftarrow c^{[3]}$

3– Remplacer dans la méthode de la question précédente l'expression de la troisième étape de l'algorithme (correspondant à l'accélération d'Aitken), soit $c^{[3]} = c^{[0]} - \frac{(c^{[1]} - c^{[0]})^2}{(c^{[2]} - 2\,c^{[1]} + c^{[0]})}$ par son expression équivalente mathématiquement : $c^{[3]} = c^{[1]} - \frac{1}{\frac{1}{(c^{[2]} - c^{[1]})} - \frac{1}{(c^{[1]} - c^{[0]})}}$.

[1]En toute rigueur (i.e., théoriquement et non plus expérimentalement comme dans ce TP), on rappelle que l'on devrait montrer (cf. cours) que la fonction $g(x)$ choisie dans la relation itérative $c^{[n+1]} = g(c^{[n]})$ est telle que $|g'(x)| < 1, \ \ \forall x \in J$, un intervalle comprenant la racine et le premier élément de la suite $c^{[0]}$.

II. Fractales de Mandelbrot

Une figure fractale ou fractale (néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 à partir de la racine latine fractus, qui signifie brisé, irrégulier), est une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques impliquant une homothétie interne. Dans la "théorie de la rugosité" développée par Mandelbrot, une fractale désigne des objets dont la structure est invariante par changement d'échelle.

L'ensemble de Mandelbrot est un ensemble de points dont la frontière définie dans le plan complexe une forme fractale facilement reconnaissable et crée (entre autres) par l'application de la méthode itérative du point fixe ($x_{[n+1]} = f(x_{[n]})$), vue en cours, sur une fonction de variable complexe z du type $f(z) = z^2 - z + c$ (avec c un nombre complexe) et conduisant à la célèbre suite itérative de point fixe :

$$z_{[n+1]} = z_{[n]}^2 + c \qquad (1)$$

Plus précisément, L'ensemble de Mandelbrot est une fractale définie comme l'ensemble des points du plan complexe $c = x_i + jy_i$ (x_i et y_i désignant un point du plan complexe ou de l'image située sur la colonne x_i et la ligne y_i) pour lesquels la suite itérative de point fixe $z_{[n+1]} = z_{[n]}^2 + c$ ne tend pas vers l'infini (en module) et pour une valeur de départ de $z_{[0]} = 0$.

Par exemple, le point du plan complexe (ou de l'image) $c = 1$ où ($x_i = 1, y_i = 0$) conduit, pour $z_{[0]} = 0$ à la séquence $0, 1, 2, 5, 26, \ldots$ qui tend vers l'infinie et ne fait pas partie de l'ensemble de Mandelbrot. Au contraire, le point du plan complexe $c = -1$ ou ($x_i = -1, y_i = 0$) donne (toujours pour $z_{[0]} = 0$) la séquence (de période 2) $0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ qui ne converge pas vers l'infinie et qui fait donc partie de l'ensemble de Mandelbrot.

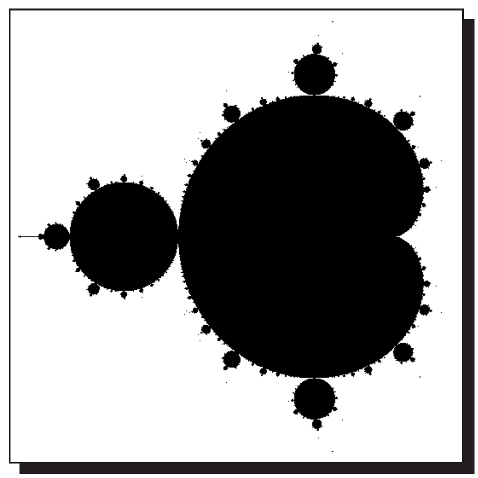

FIG. 2 – Image fractale de Mandelbrot. Un point dans l'image représentant le plan complexe est en noir si il appartient à l'ensemble de Mandelbrot et en blanc dans le cas contraire.

La fractale de Mandelbrot présente (comme toute fractale) une apparence complexe, malgré une description simple et des autosimilarités visibles à toutes échelles[2]. Elle suggère également que la méthode du point fixe peut converger très différemment pour deux équations de départ pourtant très similaires. Le 1er mars 1980, au centre de recherche IBM Thomas J. Watson (dans l'État de New York), Benoit Mandelbrot obtient pour la première fois, une visualisation par ordinateur de cet ensemble. Dans le numéro d'août 1985 du magazine SCIENTIFIC AMERICAN l'ensemble de Mandelbrot est présenté au grand public comme *l'objet mathématique le plus complexe jamais découvert* et présente l'algorithme qui permet de le tracer soi-même.

1–

Cette question vous demande de dessiner l'ensemble de Mandelbrot et de retrouver le graphe de la Fig. 2 en exprimant tout d'abord la suite itérative donnée par l'équation (1) comme deux suites itératives ; l'une associée à sa partie réelle ($x_{[n+1]} = \ldots$) et l'autre à sa partie imaginaire ($y_{[n+1]} = \ldots$).

On considérera que $c = x_k + j\, y_l$ (x_k et y_l désignant un point du plan complexe ou de l'image de taille (longueur×largeur) 512×512 (x_k et y_l désignant respectivement les colonnes et les lignes), représenté par

[2]L'ensemble de Mandelbrot fait apparaître nombre de structures en forme de bourgeons entourant une structure principale en forme de cardioïde. La cardioïde est l'ensemble des points c qui convergent vers un point fixe. Le bourgeon principal, à gauche de la cardioïde, lui est attaché au point $c = -3/4$. Il s'agit d'un disque centré en $c = -1$ et de rayon $1/4$. Il s'agit de l'ensemble des points paramètres qui, à la limite, convergent vers un cycle de période 2 (cf. l'exemple de convergence donnée plus haut). Les autres bourgeons tangents à la cardioïde sont les points admettant d'autres périodicités. Enfin, chaque bourgeon porte lui-même des bourgeons, représentatifs d'une périodicité différente, selon le même schéma. Les bourgeons sont également surmontés de filaments en forme d'antenne. Le nombre d'antennes est directement lié à la périodicité du bourgeon. Ainsi, compter le nombre d'antennes permet de déterminer la périodicité du bourgeon.

un tableau $2D$. On fera en sorte que $x_k \in [-1.5, 0.5]$ et $y_l \in [-1, 1]$. À cette fin, toutes les cellules $[k][l]$ du tableau 2D de taille 512×512 représentant l'image représentera une valeur de $c = x_k + jy_l$ avec

$$x_k = 2.0 \times (k - \text{largeur}/1.35)/(\text{largeur} - 1) \quad (2)$$

$$y_l = 2.0 \times (l - \text{longueur}/2.0)/(\text{longueur} - 1) \quad (3)$$

On peut démontrer que dès que le module de $z_{[n]}$ est strictement plus grand[3] que 2, la suite $z_{[n]}$ diverge vers l'infini, et donc c est en dehors de l'ensemble de Mandelbrot. Cela nous permet d'arrêter le calcul pour les points ayant un module strictement supérieur à 2 et qui sont donc en dehors de l'ensemble de Mandelbrot. Pour quelques valeurs de c, la divergence ($|z_{[n]}| > 2$) arrivera donc très rapidement après un petit nombre d'itérations mais pour certaines valeurs de c qui sont très proches mais pas dans l'ensemble de Mandelbrot, cela peut prendre des centaines voire des milliers d'itérations pour diverger et pour les valeurs de c dans l'ensemble de Mandelbrot, la divergence n'aura jamais lieu. Le programmeur doit donc choisir à partir de combien d'itérations $NbIterMax$ ou de profondeur il prend la décision de classer le pixel (ou la cellule du tableau) $[k][l]$ (pour $c = x_k + jy_l$ comme étant dans l'ensemble de Mandelbrot ou non. Il en résulte que l'image affichée n'est qu'une approximation du vrai ensemble et que plus $NbIterMax$ est grand, plus l'image est précise mais plus elle prend du temps de calcul.

Tracer cet ensemble de Mandelbrot pour $NbIterMax = 1000$ itérations. Remplir finalement ce tableau $2D$ dans la cellule de coordonné $[k][l]$ de respectivement 0 et 255 (correspondant respectivement à la couleur noire et blanche) si le pixel de coordonné $[k][l]$ appartient ou non à l'ensemble de Mandelbrot. Afficher et sauver le résultat de ce tableau $2D$ sous forme d'image[4] (qui s'affichera ensuite à l'écran).

2–

Représenter cet ensemble de Mandelbrot en mettant la valeur $255 - ((1 + log(\text{nbit} + 1)) * 30)$ dans le tableau $2D$ représentant l'image, dans la cellule de coordonné $[k][l]$ avec nbit représentant le nombre d'itérations ($< NbIterMax$) faites pour chaque valeur de $c = x_k + jy_l$ avant que $|z_{[n]}| > 2$ (cf. Fig. 3). En fait cette image représentera une valeur de niveaux de gris pour chaque pixel de l'image, ou valeur de c en une valeur d'autant plus claire que le nombre d'itérations au bout desquelles la suite correspondante est déclarée divergente vers l'infini (par exemple quand $|z_{[n]}| > 2$. Cela donne plusieurs zones concentriques, qui entourent l'ensemble de Mandelbrot. Les plus éloignées sont constituées de points c pour lesquels la suite $\{z_{[n]}\}$ tend *plus rapidement* vers l'infini. Ces différentes zones délimitent d'une manière plus ou moins précise l'ensemble de Mandelbrot.

---

[3] si $z_{[n]} = x_{[n]} + jy_{[n]}$), on rappelle que le module de $z_{[n]}$ est $|z_{[n]}| = \sqrt{x^2_{[n]} + y^2_{[n]}}$

[4]

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web en initialisant la variable FLAG_GRAPH=1 et remplisser le tableau $2D$ nommé Graph2D dans le programme (initialement remplie d'un dégradé de niveaux de gris (du blanc au noir)) comme une feuille de papier dessin ou vous tracerez la Figure dans l'intervalle considéré. En utilisant la variable FLAG_GRAPH=1, le programme que je vous donne sauvera cette image au format PGM. Vous pourrez ensuite la lire avec les logiciels DISPLAY, XV ou GIMP disponible sur Linux.

[5]

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.

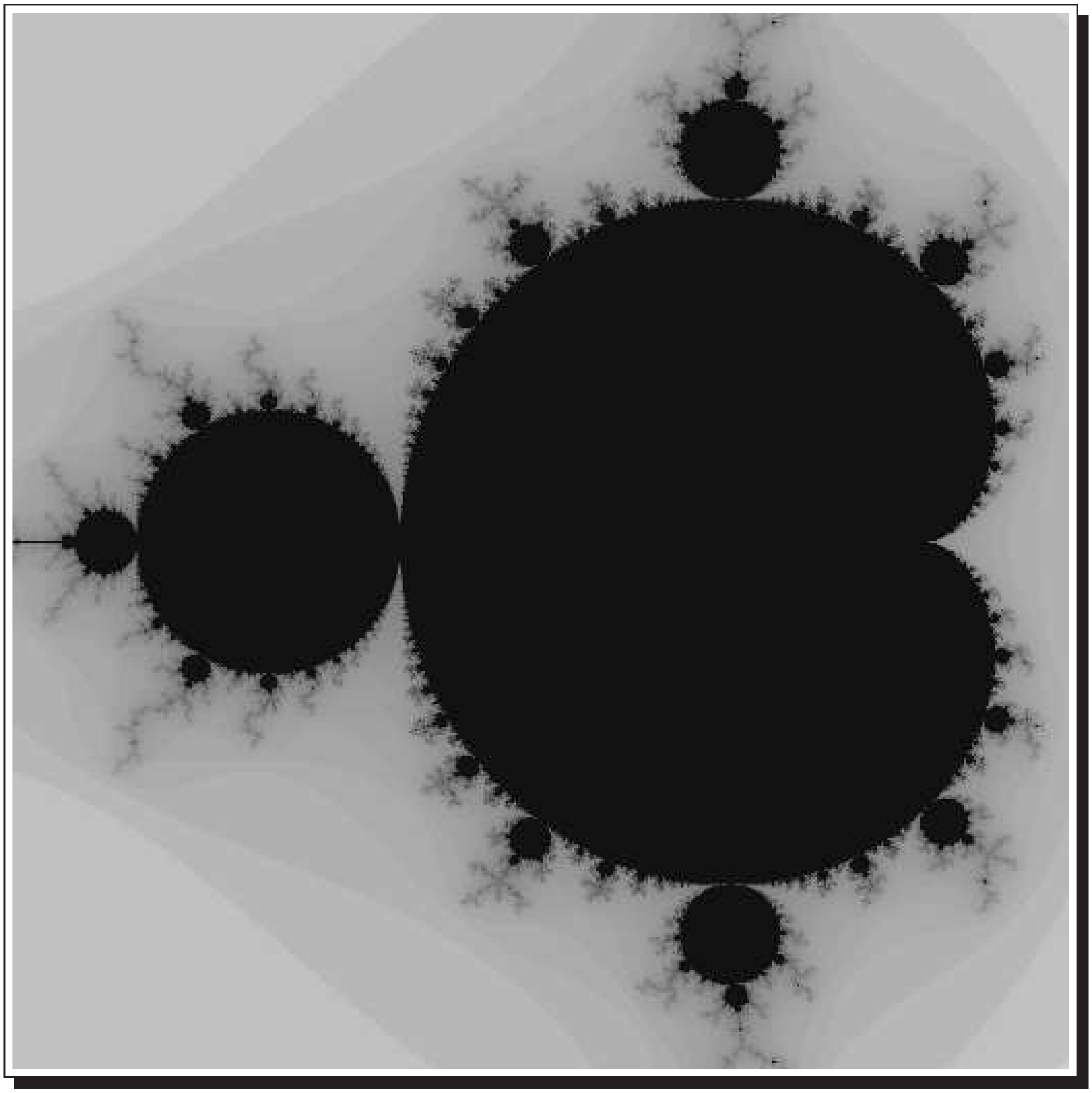

Fig. 3 – Ensemble de Mandelbrot représenté par une image ou la valeur du niveau de gris de chaque pixel est d'autant plus claire que le nombre d'itérations au bout desquelles la suite correspondante est déclarée divergente vers l'infini, est important.

Réferences

[1] M. Mignotte, C. Collet, P. Pérez, and P. Bouthemy. Three-class Markovian segmentation of high resolution sonar images. *Computer Vision and Image Understanding*, 76(3) :191–204, 1999.

[2] F. Destrempes and M. Mignotte. A statistical model for contours in images. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(5) :626–638, 2004.

[3] Wikipédia.