DIRO
IFT 2425

DEVOIR N^o 2

Systèmes Linéaires & Méthode des Différences Finies

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Systèmes Linéaires & Différences Finies

On considère un câble élastique qui occupe au repos le segment $[0, 1]$, et fixé aux extrémités, sur lequel on applique une force d'intensité $f(x)$. On démontre que son déplacement au point x, c'est à dire $u(x)$, pour $x \in [0, 1]$, est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Pour approcher la solution $u(x)$ de l'équation différentielle (1) on considère la discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ en $(n - 1)$ sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, et on construit une approximation u_i de $u(x_i)$ par la méthode des différences (ou éléments) finies.
Soient $h_s = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $x_i = i\, h_s$, pour $i = 1, \ldots, n$, (i.e., $x = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]^T$). Après discrétisation, cette méthode[1] conduit à la résolution numérique du système linéaire tri-diagonale $Au = b$ suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

où $u = [u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}]^T = [u(x_1), u(x_2), u(x_3), \ldots, u(x_{n-1})]^T$, avec u^T, la transposée du vecteur u et $b = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})]^T$.

Bien sur, plus n est grand, plus l'approximation sera précise. D'un autre coté, plus la taille du système linéaire à résoudre sera aussi élevée.

[1] On verra la méthode des différences finies au Chapitre 6, Page 42 des notes de cours.

1. Faire une fonction qui calcule la factorisation LU de A par la méthode numérique assurant des "1" sur la diagonale de la matrice L et sans permutation (dans le cas d'une telle matrice, ce n'est pas nécéssaire)[2].
2. Faire une fonction qui calcule la solution du système linéaire $A\,u = b$ à partir de la méthode de factorisation LU obtenue précédemment. Une fois la solution (i.e., le vecteur de solution $u(.)$ de ce système) obtenu, vous devrez normaliser toute les composantes de $u(.)$ en les multipliant par $h^2 = (1/n^2)$ pour que la solution ne dépende pas de la taille de la discrétisation ou du système à résoudre.
3. On va maintenant étudier la déformation du câble $u(x)$ lorsque une distribution de force $f(x)$ est appliquée sur celui-ci. On va considéré $f(x) = x\,\sin(3\,\pi\,x^2)$ et $n = 100$ sous-intervalles spatiales, calculer la déformation du câble due à $f(x)$, en utilisant à nouveau les matrices L et U précédemment obtenus.
4. On va maintenant étudier la déformation temporelle du câble $u(t,x)$ lorsque une distribution temporelle de force $f(t,x)$ est appliquée sur celui-ci. On va considérer

$$f(t,x) = x\,\sin\big[1.5\,\pi\,(2-t)\;x^2\big] \tag{3}$$

Avec $h_t = 1/m$ ($m \in \mathbb{N}$) et $t_i = i\,h_t \in [0,1]$, pour $i = 1,\ldots,m$, (i.e., $t = [t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}]^T$).

En utilisant cette discrétisation du temps, la déformation temporelle $u(t,x)$ du câble due à $f(t,x)$ consistera à résoudre m fois notre système $A\,u = b$ pour m vecteurs différents $b = f(t,x)$ (cf. Eq. (3)), $t = [t_1 = 1/20, t_2 = 2/20, \ldots, t_{m-1} = 19/20]^T$ pour obtenir m solutions $u(t,x)$ qui pourront se visualiser sous forme d'une séquence d'images[3] (prendre $m = 20$ et toujours $n = 100$).

[2] Vous pouvez prendre du code, libre de droit, sur internet et le modifier pour l'intégrer à votre programme. Néanmoins, ne tombez pas dans le piège de prendre plus de temps à chercher et adapter un code existant plutôt que de le refaire vous même. De plus, ce code devra faire nécéssairement ce que je vous demande ; une décomposition LU assurant des "1" sur la diagonale de la matrice L pour ensuite être utilisé, dans les questions suivantes, pour la résolution du système $Au = b$ pour de multiples et différents membres de droites b_i.

[3]

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web. Ce programme initialise déja Vct_fx[k][i] par les valeurs discrétisée de $f(t,x)$ pour $t = [t_1 = 1/20, \ldots, t_{m-1} = 19/20]^T$ et $x = [x_1 = 1/100, \ldots, x_{n-1} = 99/100]^T$. Rassembler ensuite les m solutions de $u(t,x)$ dans Vct_ux[k][i] par la k-ième solution temporelle, et la suite du programme affichera à l'écran, sous forme d'une séquence d'images, l'évolution temporelle de la force et de la déformation temporelle du cable $u(t,x)$ due à cette force $f(t,x)$.

4

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C/C++ avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.

.

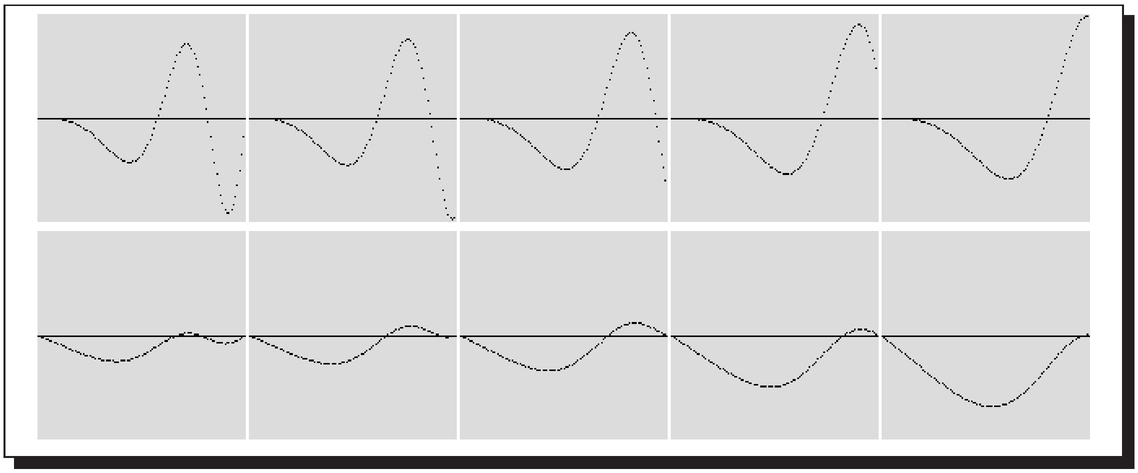

FIG. 1 – Évolution temporelle de la force et de la déformation temporelle du cable $u(t, x)$ due à cette force $f(t, x)$ pour les valeurs discrétisées du temps $t_0 = 0$, $t_5 = 5/20$, $t_{10} = 10/20$, $t_{15} = 15/20$ et $t_{19} = 19/20$.

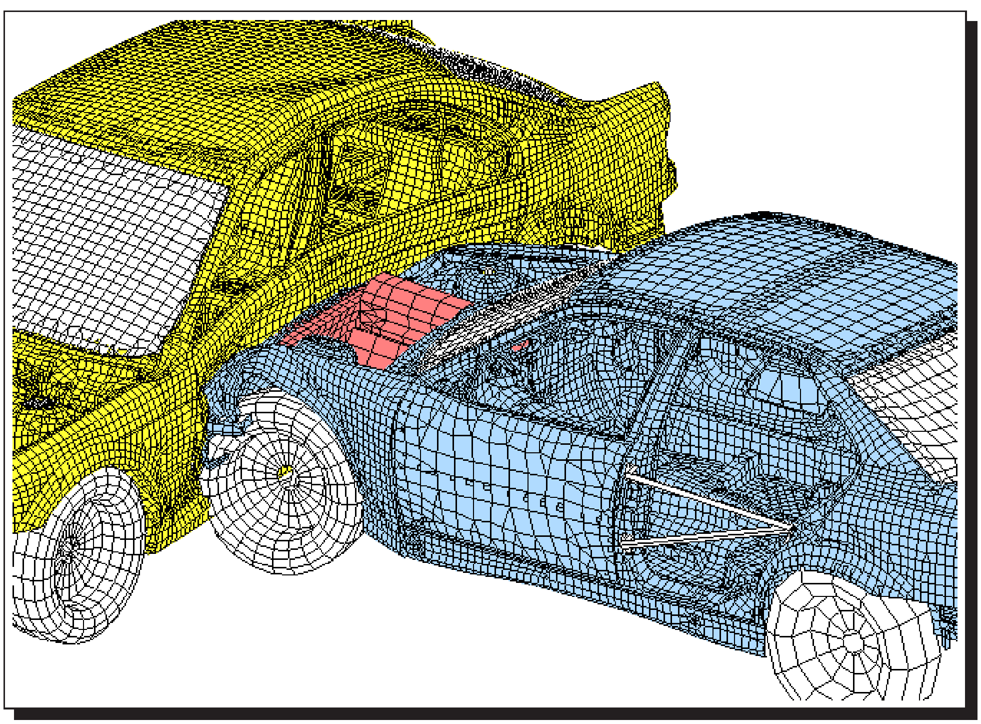

FIG. 2 – C'est cette même méthode (mais appliqué à un maillage plus compliqué que celui d'un simple cable élastique !) qui est utilisé lors des CRASH TESTS pour évaluer la déformation temporelle d'une structure, tel un véhicule, en cas de choc ou de collision.