DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 3

Intégration Numériques

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Intégration Numérique

Soit l'intégrale (pour $n \geq 0$) suivante :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\, dx \qquad n \geq 0 \qquad (1)$$

I. Méthode de Simpson

1. Implémenter un programme (utilisant des nombres DOUBLES) permettant de calculer une valeur approchée de l'intégrale (1). Plus précisement, le programme doit pouvoir prendre en paramètre le nombre de sous-intervalles M (divisant le domaine d'intégration $[0; 1]$). Si ce nombre de sous-intervalles (M) est impair, le calcul doit commencer par la méthode de Simpson 1/3 et doit se terminer par la méthode de Simpson 3/8 pour les trois derniers intervalles. Si M est pair, faire tout le calcul numérique en utilisant seulement la méthode de Simpson 1/3.

2. La vraie valeur de cette intégrale est $I_{25} = 0.0064503052_{6686}$. Afficher sous forme de graphe [1] (cf. Fig. 1), l'erreur (en ordonnée) que l'on fera en fonction du nombre de sous intervalles M (en abscisse). On considera qu'un pixel en abscisse correspond à 10 sous intervalles.

1.

Conseils Pratiques

Utiliser le programme que je vous donne sur ma page web en initialisant la variable FLAG_GRAPH=1 et remplisser le tableau 2D nommé Graph2D dans le programme (initialement remplie de blanc) comme une feuille de papier dessin ou vous tracerez l'erreur de la suite des estimations du calcul de I_n, pour différentes valeurs de n, en considérant que n est l'abscisse et que l'erreur est l'ordonné. Le programme que je vous donne sauvera cette image au format PGM. Vous pourrez ensuite la lire avec les logiciels DISPLAY, XV ou GIMP disponible sur Linux.

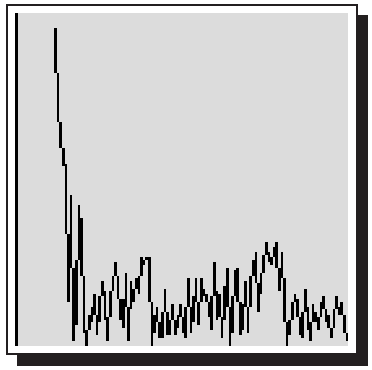

FIGURE 1 – Évolution de l'erreur en fonction de M (un pixel en abscisse correspond à 10 sous intervalles)

II. Méthode Itérative

Une autre façon de calculer une estimation de cette intégrale, consiste, lorsque c'est possible, à exploiter une relation de récurrence. Dans notre cas, une simple calcul permet de trouver la relation récurente (que je vous encourage à retrouver par calcul) suivante :

$$I_n + 5\,I_{n-1} = \frac{1}{n} \qquad (2)$$

Dans notre cas, le calcul de I_{25} peut donc être estimée, par cette relation de récurrence, de deux façons différentes :

1. En partant de I_0, qui peut être calculé facilement (et sans erreur), puisque
$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = [\ln(x+5)]_0^1 = \ln(6) - \ln(5) \approx 0.1823215568$$
puis en utilisant la relation de récurrence $I_n + 5\,I_{n-1} = n^{-1}$ pour estimer, par itération successive ; $I_1, I_2, I_5, \ldots, I_{25}$.
2. En utilisant la relation de récurrence mais en remontant en sens arrière. Dans un premier temps, remarquons que, pour des valeurs de n élevé, I_n va nécessairement converger vers 0. Cela peut se voir graphiquement ou alors en remarquant que
$$\lim_{n\to\infty} I_n + 5\,I_{n-1} = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$
Comme une valeur d'intégrale est forcément positive, cela va impliquer que I_n tendra vers zéro pour de forte valeur de n. Sachant cela, une possibilité pour l'estimation numérique de I_{25}, consiste à calculer, à partir de $I_{N_{\text{MAX}}} \approx 0$ (que l'on considerera comme étant quasi nulle), grâce à notre relation de récurrence (cf. Eq. (2)), $I_{N_{\text{MAX}}}, I_{(N_{\text{MAX}}-1)}, I_{(N_{\text{MAX}}-2)}, \ldots, I_{25}$.

Implémenter sur ordinateur ces deux techniques itératives, avec des nombres DOUBLES. Pour la deuxième technique, le programme doit pouvoir prendre en paramètre la valeur de N_{MAX}. Indiquer dans un printf à la suite, à partir des éléments donnés dans le cours (cf. Chap. 1 "Propagation des erreurs numériques"), pourquoi la deuxième méthode itérative est stable (numériquement parlant) et pas la première ?

1.

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux tel qu'indiqué dans le barême.