DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 4

Max Mignotte

Calcul d'équations différentielles

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Calcul d'équations différentielles

Mathématiquement, le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. Ce système d'équations était beaucoup trop compliqué à résoudre numériquement pour les premiers ordinateurs existant au temps de Lorentz. Celui-ci eut donc l'idée de chercher un modèle très simplifié de ces équations pour étudier une situation physique particulière : le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il aboutit alors à un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté, beaucoup plus simple à intégrer numériquement que les équations de départ. Ce système différentiel, appelé système dynamique différentiel de Lorentz s'écrit [http ://fr.wikipedia.org/] :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial x(t)}{\partial t} & = & \sigma\Big(y(t) - x(t)\Big) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} & = & \rho\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t) \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} & = & x(t)\, y(t) - \beta\, z(t) \end{array}\right.$$

ou σ est appelé le nombre de Prandtl et ρ est appelé le nombre de Rayleigh. $x(t)$ est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection, $y(t)$ est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, et $z(t)$ est proportionnel à l'écart du profil de température vertical par rapport à un profil linéaire [http ://fr.wikipedia.org/].

Lorsque les paramètres σ, ρ et β (strictement positifs) de ce système sont $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$. Le système dynamique différentiel de Lorentz présente un superbe attracteur étrange en forme d'ailes de papillon. Plus précisément, pour presque toutes les conditions initiales $x(t = 0)$, $y(t = 0)$, $z(t = 0)$ différentes de celles de quelques triplets de valeurs initiales particulières (appelées points fixes), l'orbite du système se promène sur l'attracteur, la trajectoire commençant par s'enrouler sur une aile, puis sautant d'une aile à l'autre pour commencer à s'enrouler sur l'autre aile, et ainsi de suite, de façon apparemment erratique [http ://fr.wikipedia.org/] (cf. Fig. 1 qui vous donne la trajectoire (x, z) pour $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ et $\rho = 28$ avec les conditions initiales $x(t = 0) = 1.0$, $y(t = 0) = 0.0$, $z(t = 0) = -1.0$).

Je vous demande d'obtenir cette solution par la méthode de Runge-Kutta Fehlberg et de tracer la solution dans une image qui sera visualisée avec le logiciel de traitement d'images gratuit "XnView" ou "Gimp" sur l'écran de l'ordinateur[1]. Choisir un pas suffisamment petit pour avoir une solution qui ressemble à la solution donnée en Fig. 1).

[1] Utiliser les fonctions du programme *ProgDemo.c* pour la visualisation et la sauvegarde dans une image. Cf. Page Web.

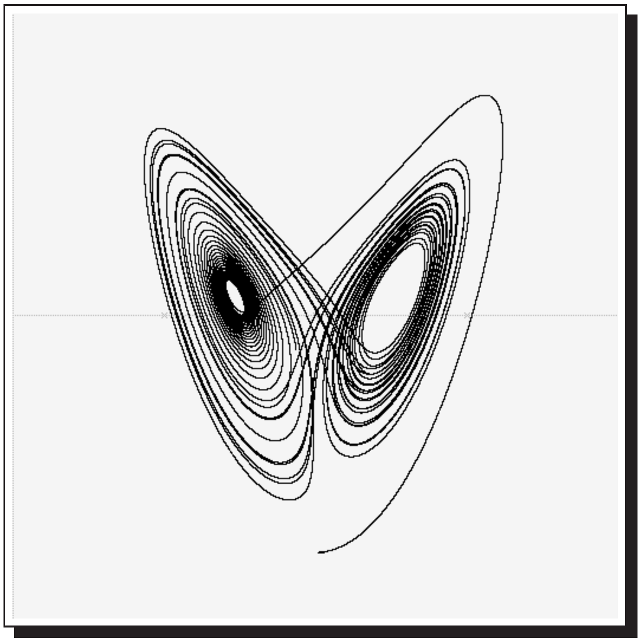

FIG. 1 – Trajectoire (x, z) obtenue pour différentes valeurs discrétisée du temps t (t variant de 0 a 40 par pas de 0.00001). Nota : Dans cet exemple $x \in [-18.63 \;\; 19.9]$ et $z \in [-0.016 \;\; 48.37]$.

Soit $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_n) = x_n$, pour calculer $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ avec $t_{n+1} = t_n + h$, on doit évaluer :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\
k_2 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{4},\; x_n + \frac{k_1}{4}\Big) \\
k_3 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{3h}{8},\; x_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\Big) \\
k_4 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{12h}{13},\; x_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\Big) \\
k_5 &= h \cdot f\Big(t_n + h,\; x_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\Big) \\
k_6 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{2},\; x_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\Big) \\
\\
x_{n+1} &= x_n + \Big(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\Big)
\end{aligned}
$$

ALGORITHME DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

1

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême*. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis qui devront se compiler et s'executer sur Linux et avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*.