DIRO
IFT 2425

DEVOIR N^{o} 4

Équations Différentielles

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Calcul d'équations différentielles

Les systèmes périodiques oscillants sont extrêmement répandus dans la nature, on peut les retrouver, par exemple, dans la trajectoire parcourue par un électron gravitant autour de l'atome d'un cristal plongé dans un champ magnétique ou dans un rythme biologique (respiration, contraction du muscle cardiaque, alternance de veille et de sommeil, cycle de reproduction des plantes, etc.). La clef de l'analyse de tous ces phénomènes est l'oscillateur forcé et l'équation de Van der Pol est une modélisation assez générale mettant en équation les différents types de mouvement associés à bon nombre de systèmes oscillatoires existant. Plus précisement, l'oscillateur de Van der Pol forcé est donné par l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial^2\theta(t)}{\partial t^2} - \Big(\epsilon - \theta^2(t)\Big)\frac{\partial\theta(t)}{\partial t} + \theta(t) = a\cos(wt) \tag{1}$$

Je vous demande d'obtenir une estimée numérique de la solution de cette équation différentielle par la méthode de Runge-Kutta Fehlberg et de tracer la solution obtenue dans une image dans le plan $(\theta, \frac{\partial\theta(t)}{\partial t})$ qui sera ensuite visualisée avec le logiciel de traitement d'images gratuit "XnView" ou "Gimp" sur l'écran de l'ordinateur[1].

- Trouver une des trois solutions données en Fig. 1.
- Trouver une solution (i.e., associée à un jeux de paramètre $[\epsilon,\ w,\ a]$ que vous choisirez et qui donne une solution visuellement intéressante (ou visuellement très différentes des exemples données dans la Fig. 1).

Soit $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_n) = x_n$, pour calculer $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ avec $t_{n+1} = t_n + h$, on doit évaluer

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n)\\
k_2 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{4},\ x_n + \frac{k_1}{4}\Big)\\
k_3 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{3h}{8},\ x_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\Big)\\
k_4 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{12h}{13},\ x_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\Big)\\
k_5 &= h \cdot f\Big(t_n + h,\ x_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\Big)\\
k_6 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ x_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\Big)\\
\\
x_{n+1} &= x_n + \Big(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\Big)
\end{aligned}$$

ALGORITHME DE RUNGE-KUTTA FEHLBERG

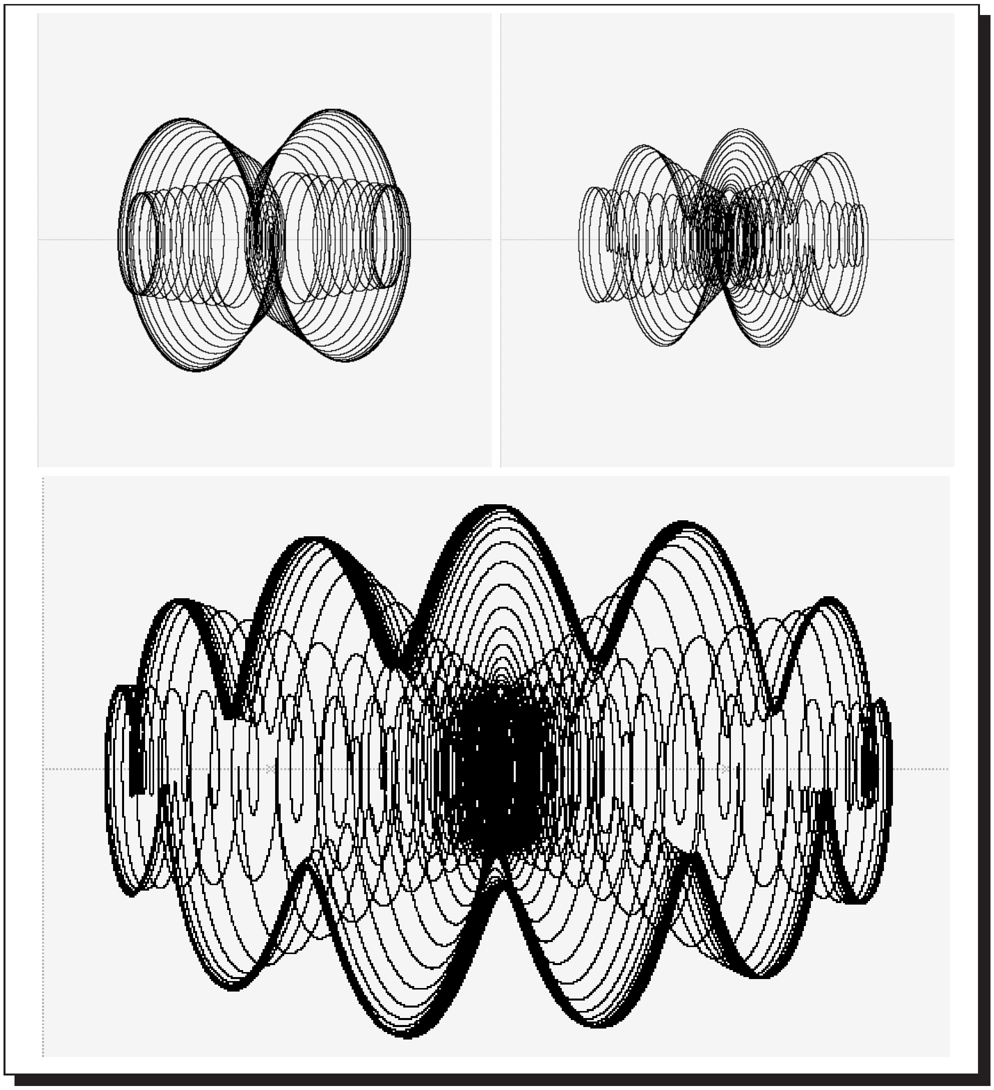

FIG. 1 – Trajectoires (θ, $\frac{\partial\theta(t)}{\partial t}$) obtenues pour différentes valeurs discrétisées du temps t, pour les conditions initiales $\theta(t=0)=0$ et $\frac{\partial\theta(t=0)}{\partial t}=0$, pour $[\epsilon = 0.1 \quad a=3]$ et respectivement $w \in [5\,,\,8\,,\,12]$ (t variant, pour le dernier graphique entre 0 a 150 par pas de 0.00005 et $\theta \in [-0.65 \;\; 0.65]$ et $\frac{\partial\theta(t)}{\partial t} \in [-0.88 \;\; 0.88]$).

1

Conseils

Utiliser les fonctions du programme *ProgDemo.c* pour la visualisation et la sauvegarde dans une image. Cf. Page Web.

2

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême* situé sur la page web du cours. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* (*man remise* pour plus de détails) pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis. Les noms des programmes à remettre devront avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*. Les programmes devront se compiler et s'executer sur Linux.

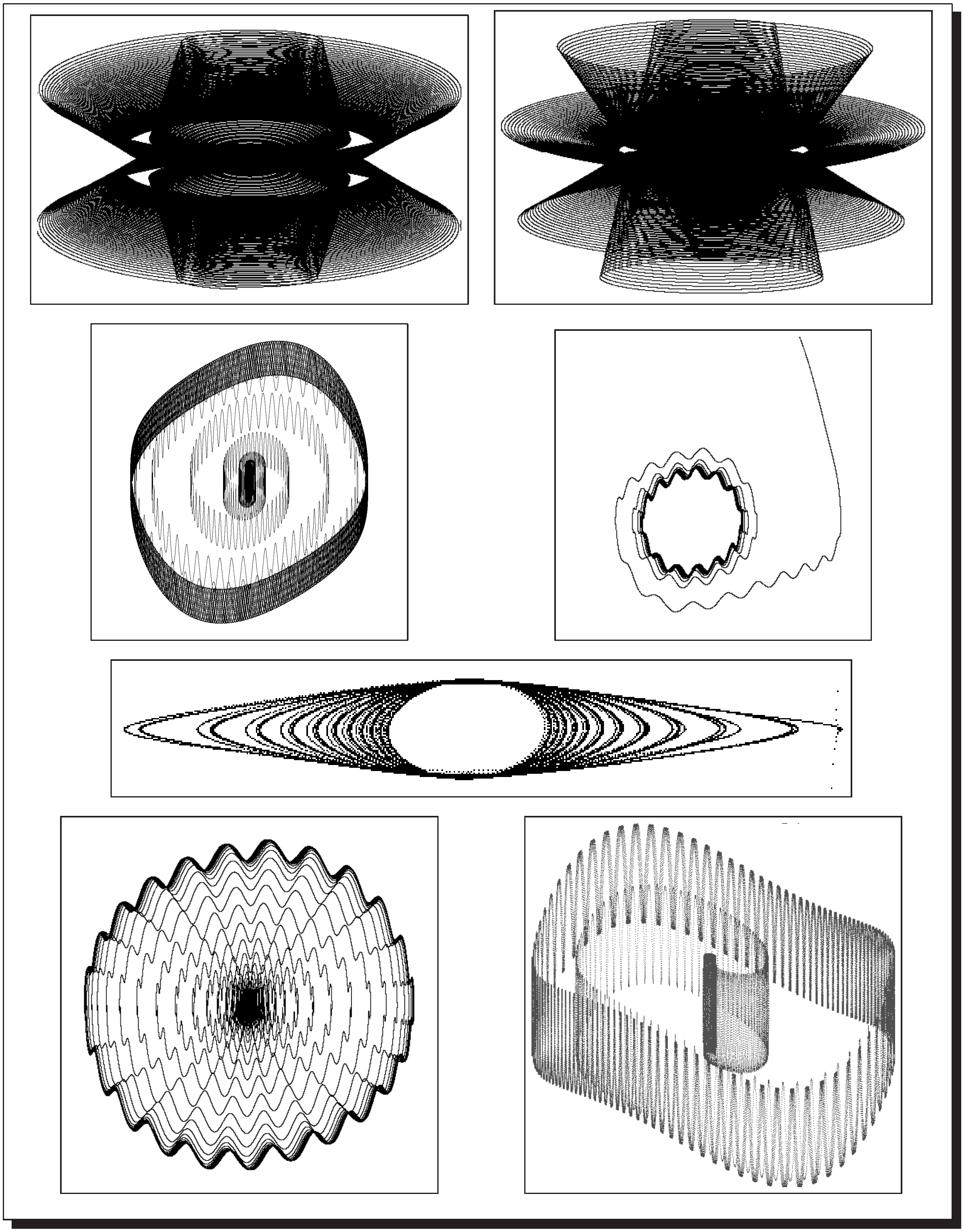

Fig. 2 – **Les plus belles courbes trouvées par les étudiants**
De haut en bas et gauche à droite, $[a = 2.5; e = 0.1; w = 5.0;]$ $[a = 1.0; e = 0.1; w = 8.0;]$ $[a = 8.0; e = 0.3; w = 50;]$ $[a = 1.0; e = 0.1; w = 15;]$ $[a = 3.0; e = 0.1; w = 12;]$ $[a = 1.0; e = 0.1; w = 24;]$ $[a = 100; e = 1; w = 100;]$

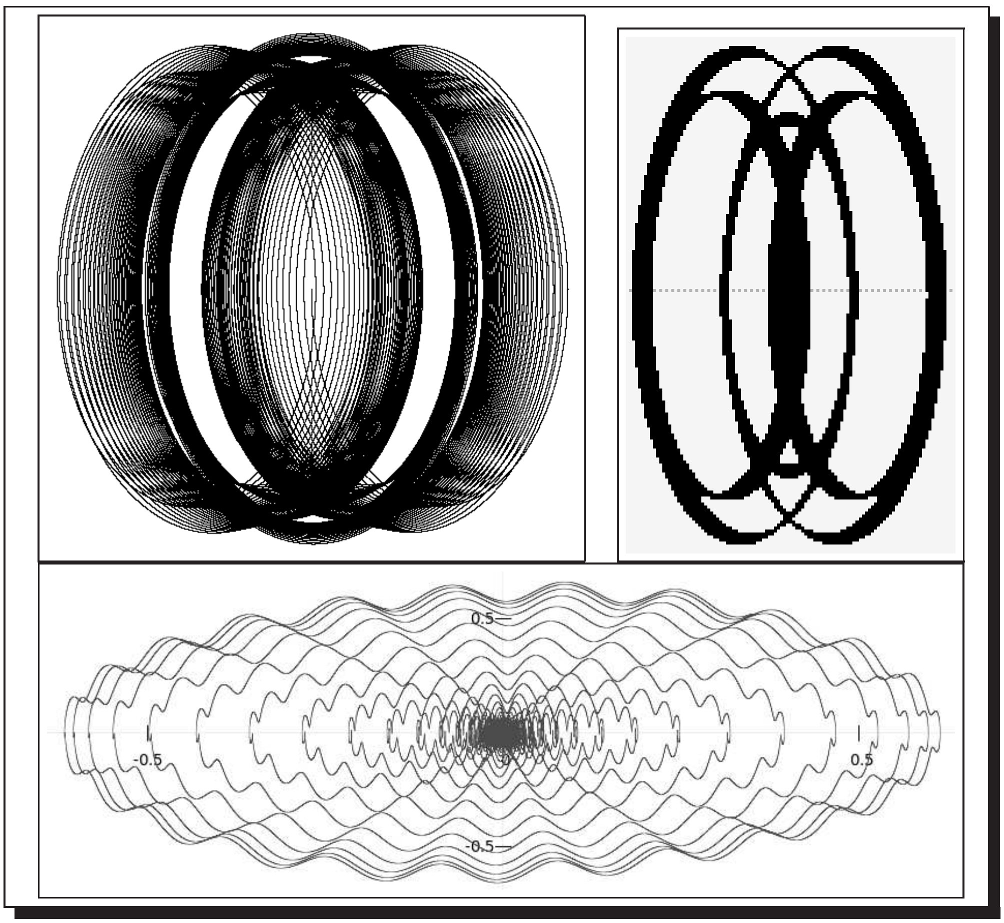

Fig. 3 – **Les plus belles courbes trouvées par les étudiants**
De haut en bas et gauche à droite, $[a = 8.0; e = 0.1; w = 25.0;]$ $[a = 2; e = 0.001; w = 5.0;]$ $[a = 1; e = 0.1; w = 24.0;]$

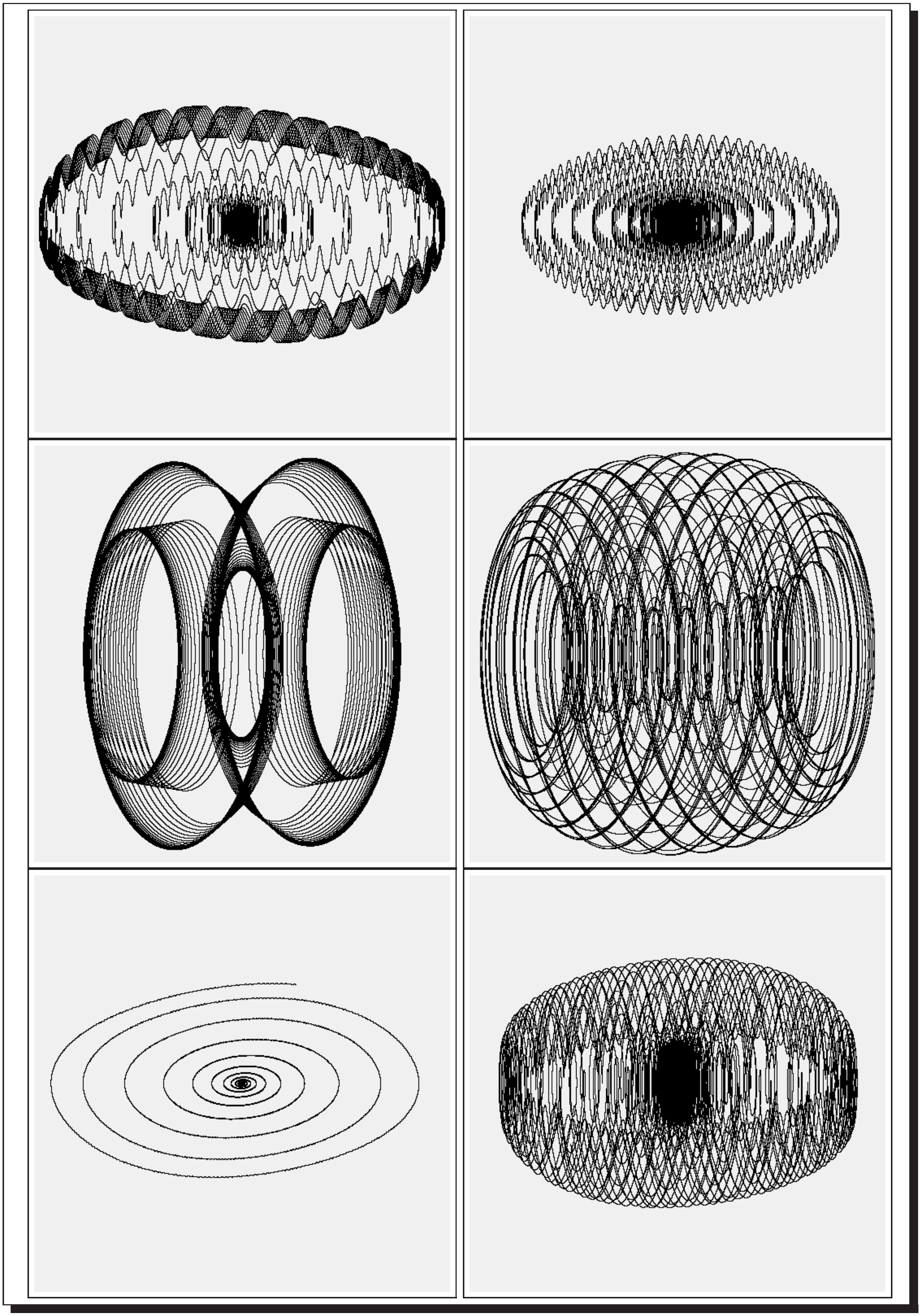

Fig. 4 – **Les plus belles courbes trouvées par les étudiants**