DIRO
IFT 2425

DEVOIR N^o 4

Équations Différentielles & Vitesse de Convergence Fractale

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Équation Différentielle Du Pendule Magnétique

Le déterminisme, au sens de Newton, est une idée selon laquelle la connaissance de l'état d'un système à l'instant t permet de calculer son évolution à des temps arbitrairement lointains. Si cette notion de déterminisme était vraie, cela voudrait dire qu'un ordinateur surpuissant nous permettrait de prédire, sans erreur, la météo qu'il ferait dans une dizaine d'années.

Si cette pensée a été le pilier de la motivation scientifique depuis Newton, on s'aperçoit depuis un demi-siècle environ qu'elle est dans certaines conditions complètement fausse. Dans certains cas le déterminisme n'existe pas et il nous est donc impossible de calculer l'avenir d'un système plus longtemps qu'une certaine durée. Cette limite n'est en aucun cas une limite technologique. C'est une limite intrinsèque au système étudié, que l'on appelle communément le chaos ou l'effet papillon.

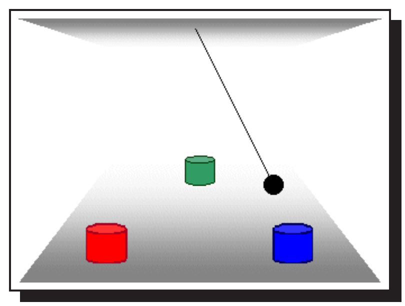

Fig. 1 –

Pour s'en convaincre, réalisons l'expérience suivante ; considérons un pendule constitué d'une bille métallique supportée par un fil (cf. Fig. 1). Ce pendule oscille au-dessus de trois aimants (assez proches) disposés (autour d'un cercle) à 120°. La longueur du fil soutenant la bille est telle que la bille ne peut pas toucher les aimants, mais elle peut être attirée par eux.

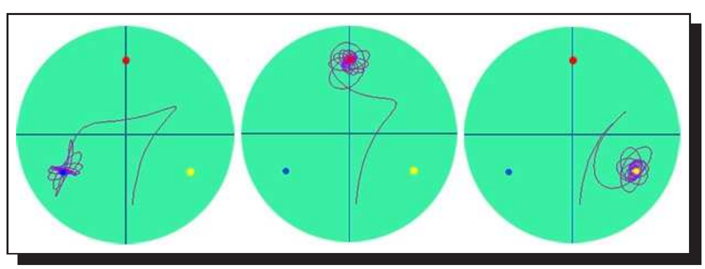

Fig. 2 – Les trois attractions possibles de la bille

Lorsque nous lançons le pendule au hasard dans une direction quelconque à partir d'une position initiale, nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique. Mais contrairement à un pendule ordinaire (où seule la gravité agit) la bille métallique va subir l'attraction magnétique des aimants. Sa trajectoire est compliquée et au final elle va finir par s'approcher trop près d'un aimant et finir par pointer dans sa direction. Selon différentes positions initiales du pendule (x_0, y_0) (et pour une vitesse initiale nulle (x'_0, y'_0), nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique, jusqu'à une stabilisation du pendule autour de l'un des trois aimants de couleurs différentes (cf. Fig. 2).

Un modèle mathématique pour la simulation de ce pendule magnétique est donné par la résolution numérique, par une méthode de Runge-Kutta (par exemple) du système de deux équations différentielles. Ces équations sont les suivantes, ou (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les coordonnées des 3 aimants, d les distances entre les aimants, R et C sont des paramètres. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ expriment la position du pendule à l'instant t, $\partial x(t)/\partial t$ et $\partial y(t)/\partial t$ expriment la vitesse du pendule.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + R\,\frac{\partial x(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(x_i - x)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cx &= 0 \\
\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + R\,\frac{\partial y(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(y_i - y)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cy &= 0
\end{aligned}$$

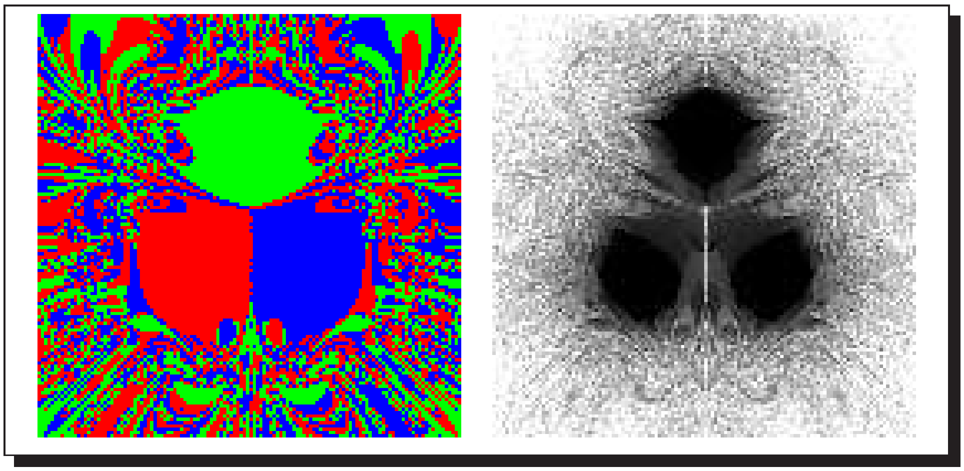

FIG. 3 – À gauche, les trois bassins d'attractions (pour les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 20$), à droite, la vitesse de convergence pour une image de taille 128×128 (≈ 30 sec. de calcul).

Puisque nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique jusqu'à une stabilisation du pendule autour de l'un des trois aimants de couleurs différentes (cf. Fig. 2), une fractale, issue de ce système chaotique, peut se révèler soit en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée (i.e., en (x_0, y_0)) dans la couleur de l'aimant au-dessus duquel la bille s'est immobilisée. Par exemple, si la bille, une fois lâchée au-dessus du point (x_0, y_0) (position initiale) s'immobilise au-dessus de l'aimant rouge, le point (x_0, y_0) est alors coloré en rouge. Cette procédure permet de définir les trois bassins d'attraction de ce pendule magnétique attiré ses trois aimants (cf. Fig. 3). Une autre fractale se construit aussi en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée en un niveaux de gris qui est d'autant plus clair que le nombre d'itérations est nécéssaire pour que la bille s'immobilise.

Sur l'extérieur des deux figures 3, les régions (couleur ou niveau de gris uniforme) semblent s'emmêler de façons complètement désordonnées. La complexité de ces régions nous fait comprendre qu'il sera *à priori* difficile de prédire l'aimant sur lequel le pendule va finir en fonction du point de départ ou le nombre d'itérations nécéssaire pour s'immobiliser sur l'un des aimants. A priori, ses points n'ont rien de particulier, et pourtant contrairement aux régions uniformes, leur entremêlement nous dit qu'un petit décalage dans la position initiale du pendule change radicalement son évolution finale puisqu'il se retrouve carrément sur un aimant différent ou se stabilise après un nombre d'itérations différent. Si on zoomait beaucoup dans les régions emmêlées, on verrait, qu' importe le facteur de zoom, toujours des régions emmêlées. Une condition initiale infiniment peu différente produit donc une trajectoire macroscopiquement très différente. Comme on ne peut connaitre la position du pendule qu'avec une précision finie (erreur de données ou d'affectation), il subsistera toujours une erreur. Sachant maintenant qu'une différence infime dans la position initiale du pendule mène à un comportement radicalement différent, on voit tout de suite que cette incertitude initiale, aussi petite soit-elle- va se traduire en une incertitude macroscopique au bout d'un certain temps. Pour un système chaotique, l'incertitude du calcul croit exponentiellement avec le temps ! Bien sur, plus la condition initiale est précise au départ, plus vous êtes précis longtemps, mais le temps arrivera inexorablement où l'incertitude ou l'imprecision de votre prédiction sera aussi grande que la prédiction elle-même et qu'elle serait donc sans aucune valeur.

1. Dans ce TP, je vous demande d'obtenir une estimée numérique de la solution de cette équation différentielle par la méthode de Runge-Kutta Fehlberg et de tracer la solution obtenue dans une image dans le plan (x, y) qui sera ensuite visualisée avec le logiciel de traitement d'images gratuit “XnView” ou "Gimp” sur l'écran de l'ordinateur[1] (cf. Fig. 4).

   Les paramètres de ce problème sont les suivants :

   pour une image dont $x \in [-2\ 2]$ et $y \in [-2\ 2]$ les coordonnés des trois aimants sont :
   $$[x_1 = 0\,;\, y_1 = 1], \quad [x_2 = -1/(\sqrt{2})\,;\, y_2 = -1/2], \quad [x_3 = 1/(\sqrt{2})\,;\, y_3 = -1/2] \quad ,$$
   $C = 0.25,\ R = 0.1,\ D = 0.3\ ,\ \partial x(t=0)/\partial t = \partial y(t=0)/\partial t = 0$

2. De visualiser l'image de la vitesse de convergence, comme celle obtenue en Fig. 3 à droite. On considérera les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 20$ et on considérera que le pendule est arrivé à convergence si il existe plus de 20 pas (ou itérations ou points) consécutifs ou le pendule se trouve à une distance (norme $L1$) de l'un des trois aimants de moins de 0.5.

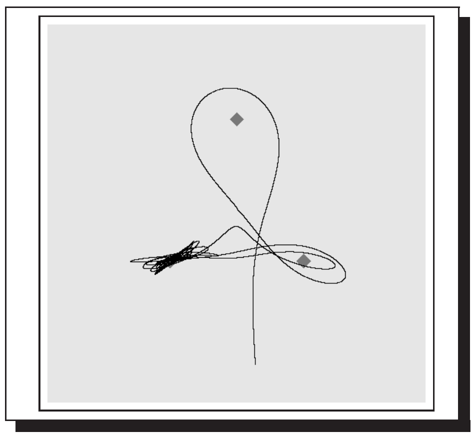

Fig. 4 –
Mouvement du pendule obtenu pour les paramètres $x(t_0) = 0.2$, $y(t_0) = -1.6$, $h = 0.0001$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 30$ pour une image de taille 512×512.

Soit $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_n) = x_n$, pour calculer $x(t_{n+1}) = x_{n+1}$ avec $t_{n+1} = t_n + h$, on doit évaluer

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\
k_2 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{4},\ x_n + \frac{k_1}{4}\Big) \\
k_3 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{3h}{8},\ x_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\Big) \\
k_4 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{12h}{13},\ x_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\Big) \\
k_5 &= h \cdot f\Big(t_n + h,\ x_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\Big) \\
k_6 &= h \cdot f\Big(t_n + \frac{h}{2},\ x_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\Big) \\
\\
x_{n+1} &= x_n + \Big(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\Big)
\end{aligned}$$

Algorithme de Runge-Kutta Fehlberg

Réferences

[2] Wikipédia.

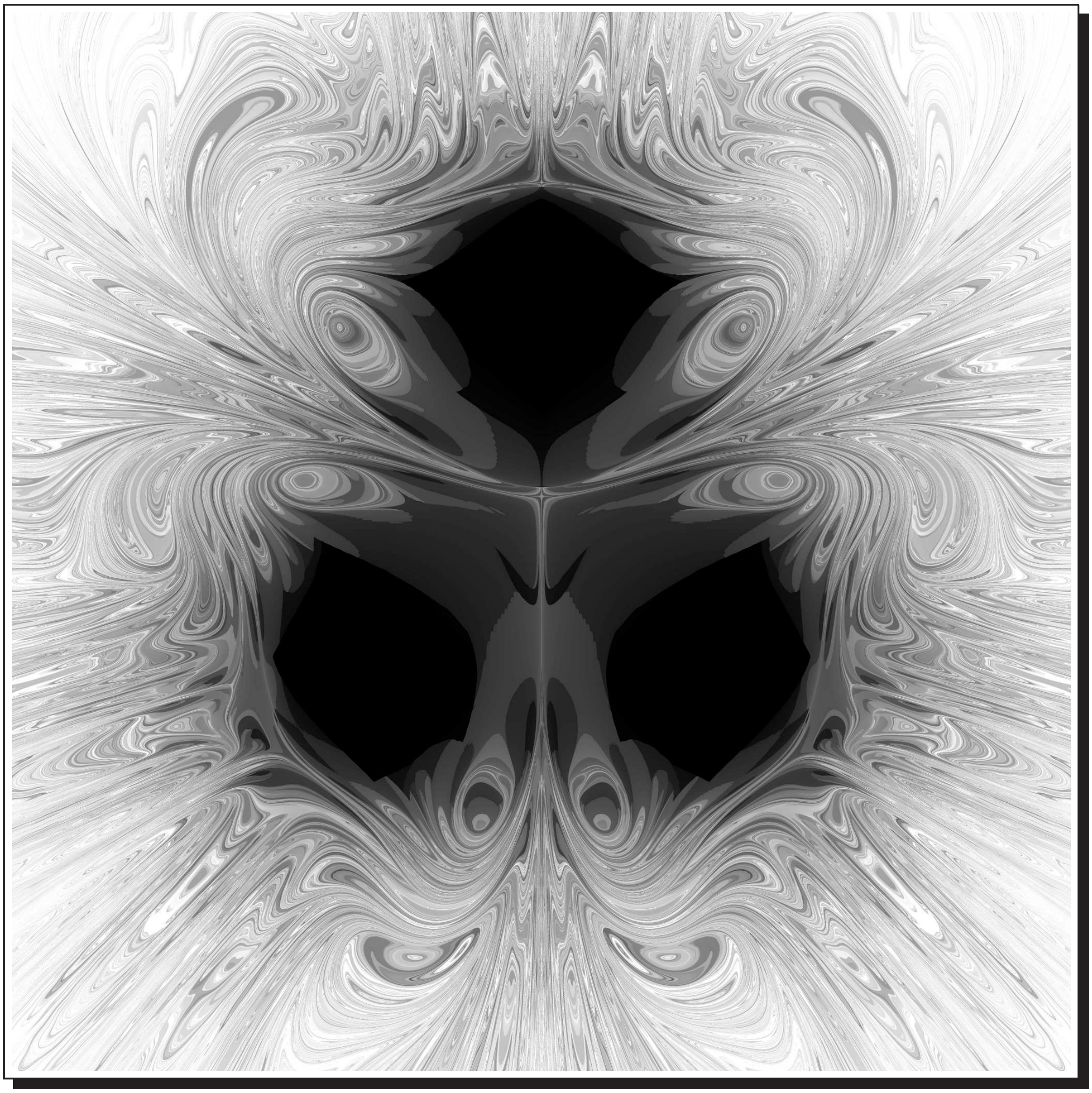

Fig. 5 – L'image fractale chaotique de la vitesse de convergence pour les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 20$ ($\approx$ 30 minutes de calcul).

1

Conseils

Utiliser les fonctions du programme *ProgDemo.c* pour la visualisation et la sauvegarde dans une image. Cf. Page Web.

2

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême*. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis qui devront se compiler et s'executer sur Linux et avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*.