DIRO
IFT 2425

DEVOIR N° 4

Équations Différentielles & Fractale d'erreur de modèle

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/IFT2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

I. Équation Différentielle Du Pendule Magnétique

Le déterminisme, au sens de Newton, est une idée selon laquelle la connaissance de l'état d'un système à l'instant t permet de calculer son évolution à des temps arbitrairement lointains. Si cette notion de déterminisme était vraie, cela voudrait dire qu'un ordinateur surpuissant nous permettrait de prédire, sans erreur, la météo qu'il ferait dans une dizaine d'années.

Si cette pensée a été le pilier de la motivation scientifique depuis Newton, on s'aperçoit depuis un demi-siècle environ qu'elle est dans certaines conditions complètement fausse. Dans certains cas le déterminisme n'existe pas et il nous est donc impossible de calculer l'avenir d'un système plus longtemps qu'une certaine durée. Cette limite n'est en aucun cas une limite technologique. C'est une limite intrinsèque au système étudié, que l'on appelle communément le chaos ou l'effet papillon.

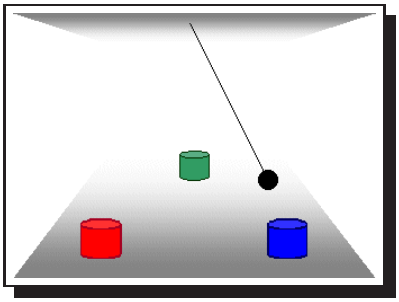

FIG. 1 –

Pour s'en convaincre, réalisons l'expérience suivante; considérons un pendule constitué d'une bille métallique supportée par un fil (cf. Fig. 1). Ce pendule oscille au-dessus de trois aimants (assez proches) disposés (autour d'un cercle) à 120°. La longueur du fil soutenant la bille est telle que la bille ne peut pas toucher les aimants, mais elle peut être attirée par eux.

Lorsque nous lançons le pendule au hasard dans une direction quelconque à partir d'une position initiale, nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique. Mais contrairement à un pendule ordinaire (où seule la gravité agit) la bille métallique va subir l'attraction magnétique des aimants. Sa trajectoire est compliquée et au final elle va finir par s'approcher trop près d'un aimant et finir par pointer dans sa direction. Selon différentes positions initiales du pendule (x_0, y_0) (et pour une vitesse initiale nulle (x'_0, y'_0)), nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique, jusqu'à une stabilisation du pendule autour de l'un des trois aimants de couleurs différentes (cf. Fig. 2).

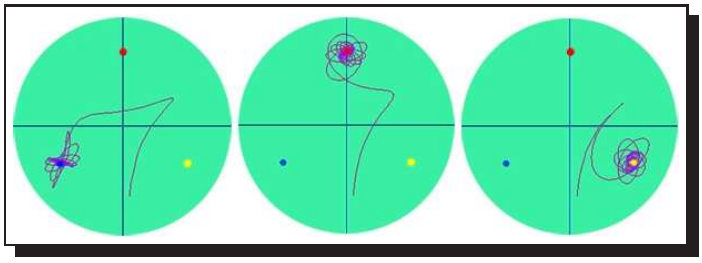

FIG. 2 – Les trois attractions possibles de la bille

Un modèle mathématique pour la simulation de ce pendule magnétique est donné par la résolution numérique, par une méthode d'Euler (par exemple) du système de deux équations différentielles. Ces équations sont les suivantes, ou (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sont les coordonnées des 3 aimants, d les distances

entre les aimants, R et C sont des paramètres. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ expriment la position du pendule à l'instant t, $\partial x(t)/\partial t$ et $\partial y(t)/\partial t$ expriment la vitesse du pendule.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + R\frac{\partial x(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(x_i - x)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cx &= 0 \\
\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + R\frac{\partial y(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{(y_i - y)}{\left(\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+D^2}\right)^3}\right\} + Cy &= 0
\end{aligned}$$

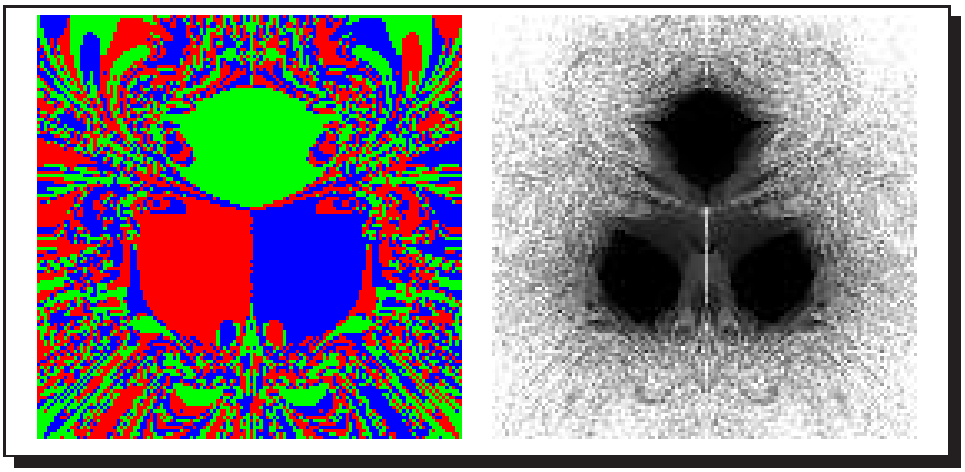

FIG. 3 – À gauche, les trois bassins d'attractions (en utilisant une méthode de Runge-Kutta et pour les paramètres $h = 0.1$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 20$), à droite, la vitesse de convergence pour une image de taille 128×128 (≈ 30 sec. de calcul).

Puisque nous observons un déplacement chaotique de la bille métallique jusqu'à une stabilisation du pendule autour de l'un des trois aimants de couleurs différentes (cf. Fig. 2), une fractale, issue de ce système chaotique, peut se révèler soit en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée (i.e., en (x_0, y_0)) dans la couleur de l'aimant au-dessus duquel la bille s'est immobilisée. Par exemple, si la bille, une fois lâchée au-dessus du point (x_0, y_0) (position initiale) s'immobilise au-dessus de l'aimant rouge, le point (x_0, y_0) est alors coloré en rouge. Cette procédure permet de définir les trois bassins d'attraction de ce pendule magnétique attiré ses trois aimants (cf. Fig. 3). Une autre fractale se construit aussi en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée en un niveaux de gris qui est d'autant plus clair que le nombre d'itérations est nécéssaire pour que la bille s'immobilise.

Sur l'extérieur des deux figures 3, les régions (couleur ou niveau de gris uniforme) semblent s'emmêler de façons complètement désordonnées. La complexité de ces régions nous fait comprendre qu'il sera *a priori* difficile de prédire l'aimant sur lequel le pendule va finir en fonction du point de départ ou le nombre d'itérations nécéssaire pour s'immobiliser sur l'un des aimants. A priori, ses points n'ont rien de particulier, et pourtant contrairement aux régions uniformes, leur entremêlement nous dit qu'un petit décalage dans la position initiale du pendule change radicalement son évolution finale puisqu'il se retrouve carrément sur un aimant différent ou se stabilise après un nombre d'itérations différent. Si on zoomait beaucoup dans les régions emmêlées, on verrait, qu' importe le facteur de zoom, toujours des régions emmêlées. Une condition initiale infiniment peu différente produit donc une trajectoire macroscopiquement très différente. Comme on ne peut connaitre la position du pendule qu'avec une précision finie (erreur de données ou d'affectation), il subsistera toujours une erreur. Sachant maintenant qu'une différence infime dans la position initiale du pendule mène à un comportement radicalement différent, on voit tout de suite que cette incertitude initiale, aussi petite soit-elle- va se traduire en une incertitude macroscopique au

bout d'un certain temps. Pour un système chaotique, l'incertitude du calcul croit exponentiellement avec le temps ! Bien sur, plus la condition initiale est précise au départ, plus vous êtes précis longtemps, mais le temps arrivera inexorablement où l'incertitude ou l'imprecision de votre prédiction sera aussi grande que la prédiction elle-même et qu'elle serait donc sans aucune valeur.

1. Dans ce TP, je vous demande d'obtenir une estimée numérique de la solution de cette équation différentielle par la méthode d'Euler simple ($h = 0.0001$) et de tracer la solution obtenue dans une image dans le plan (x, y) qui sera ensuite visualisée avec le logiciel de traitement d'images gratuit "XnView" ou "Gimp" sur l'écran de l'ordinateur[1] (cf. Fig. 4). Les paramètres de ce problème sont les suivants :

pour une image dont $x \in [-2\ 2]$ et $y \in [-2\ 2]$ les coordonnés des trois aimants sont :
$[x_1 = 0\,;\, y_1 = 1], \quad [x_2 = -1/(\sqrt{2})\,;\, y_2 = -1/2], \quad [x_3 = 1/(\sqrt{2})\,;\, y_3 = -1/2]$,
De plus, $C = 0.25$, $R = 0.1$, $D = 0.3$, $\partial x(t = 0)/\partial t = \partial y(t = 0)/\partial t = 0$

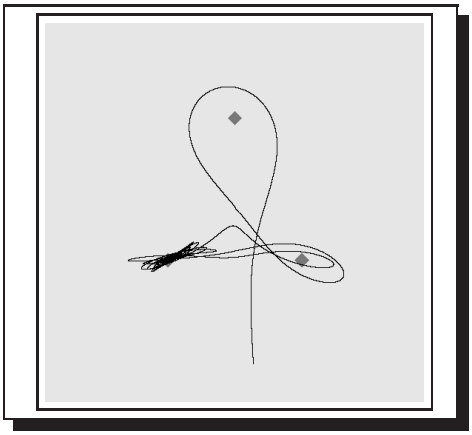

FIG. 4 –
Mouvement du pendule obtenu par une méthode d'Euler simple avec les paramètres $x(t_0) = 0.2$, $y(t_0) = -1.6$, $h = 0.0001$, $t_0 = 0$, $t_{\text{final}} = 30$ pour une image de taille 512×512.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, une fractale peut être générée à partir de tout système chaotique, et notamment celui créé par le pendule magnétique soit en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée par la couleur de l'aimant au-dessus duquel la bille s'est immobilisée (cf. Fig. 2.a) ou soit en coloriant le point à la verticale duquel la bille fut lâchée en un niveaux de gris qui est d'autant plus clair que le nombre d'itérations est nécessaire pour que la bille s'immobilise (cf. Fig. 2.b). Mais une fractale peut être aussi généré à partir des erreurs générées par une méthode de résolution d'équations différentielles comme la méthode d'Euler simple qui génère des erreurs (de modèle) si le pas h choisi est trop grand (du en fait à l'approximation linéaire par morceaux de la fonction que l'on recherche et qui est solution de notre système d'équations différentielles). En particulier si on souhaite visualiser les erreurs de modèle de la méthode d'Euler obtenu pour $h = 0.1$ (pas h trop grand), on peut visualiser, pour chaque pixel x_0, y_0 de l'image, et qui correspond au point, à la verticale duquel la bille est lâchée, la distance existant entre les deux points obtenus, par exemple à l'instant $t = 5$, par une méthode d'Euler avec $h = 0.1$ et celle obtenue pour un h beaucoup plus petit (générant des erreus beaucoup moins grandes, voire nulle *i.e.*, au maximum $h = 0.01$).

2. Dans ce TP, je vous demande de générer la fractale des erreurs générées par la méthode d' Euler simple (pour $h = 0.1$) au temps $t = 5$ en considérant la méthode d'Euler simple avec $h = 0.01$ comme méthode générant moins d'erreurs [1] pour les mêmes paramètres de la question 1.

[1] Par exemple, le pixel $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ de cette fractale aura pour niveaux de gris la distance entre le pont $(x(t = 5), y(t = 5))$ obtenu lorsqu'on lache la bille à la verticale du point $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, par la méthode d'Euler simple ($h = 0.1$ donc $x(t = 5) = x_{50}$ et $y(t = 5) = y_{50}$) et $(x(t = 5), y(t = 5))$ obtenu par la méthode d'Euler simple pour $h = 0.01$ (donc $x(t = 5) = x_{500}$ et y_{500}). Recaler ensuite l'image obtenue pour que les niveaux de gris soient compris entre 0 et 255.

Réferences

[2] Wikipédia.

FIG. 5 – L'image fractale chaotique de l'erreur de modèle de la méthode d'Euler $h = 0.1$ (comparativement à la méthode d'Euler pour $h = 0.01$), pour une image de taille 128×128 et pour respectivement $t = 2$, $t = 4$, $t = 5$, $t = 6$, $t = 7$ (≈ 10 sec. de calcul).

FIG. 6 – L'image fractale chaotique de l'erreur de modèle de la méthode d'Euler $h = 0.1$ (comparativement à la méthode d'Euler pour $h = 0.01$), pour une image de taille 1024×1024 et pour $t = 7$ (≈ 10 min. de calcul).

[3]

Remise & Rapport

Vous devez rendre électroniquement le(s) programme(s) fait en C avant la date de remise spécifiée dans le fichier *barême*. Pour la remise électronique, utilisez le programme *remise* pour remettre votre code dans le répertoire TP<Numéro du Tp>. N'oubliez pas d'inscrire vos noms, courrier électronique en commentaire en haut du fichier .c remis qui devront se compiler et s'executer sur Linux et avoir le format suivant *Tp<Numero du Tp>-IFT2425-<Numéro de la question>.c*.