DIRO
IFT 2421

EXAMEN FINAL CORRECTION

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *19/04/2000*

I	Courbes splines.
II	Intégration numérique.
III	Résolution d'équation différentielle.
IV	Calcul de valeurs et vecteurs propres.

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Courbes splines (25 points)

1. (20 points) **Spline Naturelle.**
   On donne les points $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(3,3)$ ainsi que la fonction $Q(x)$ définie par les deux cubiques suivantes,

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= 0.5(x-1)^3 + b_1(x-1)^2 + c_1(x-1) + 1, \quad \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2. \\ Q_2(x) &= a_2(x-2)^3 + b_2(x-2)^2 + c_2(x-2) + 1, \quad \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

   Déterminer les valeurs de b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 pour que $Q(x)$ soit une spline naturelle de Type 1. Justifier.

2. (5 points) **Spline de Bézier.**
   Soit les 2 splines de Bézier cubiques suivantes,
   – B_1 construite à partir des points, $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(3,3)$ et $D(x,y)$.
   – B_2 construite à partir des points, $D(x,y)$, $E(3,-1)$, $F(2,-2)$, et $G(0,0)$.
   Donner l'ensemble des positions pour le point D, afin que $B_1 \bigcup B_2$ soit continue et que la dérivée de $B_1 \bigcup B_2$ soit aussi continue.

Réponse

1.

Spline naturelle donc $s_1 = s_3 = 0$ par définition (cf. chap. 4, p. 46). De plus, on a ici $h = 1$. On a donc les relations suivantes (cf. chap. 4 p. 45),

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{s_3 - s_2}{6} = -\frac{s_2}{6}, \\ b_2 &= \frac{s_2}{2}, \\ c_2 &= (y_3 - y_2) - \frac{2s_2 + s_3}{6} = 2 - \frac{s_2}{3}. \end{aligned}$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s_2 - s_1}{6} = \frac{s_2}{6}, \\ b_1 &= \frac{s_1}{2} = 0, \\ c_1 &= (y_2 - y_1) - \frac{1}{6}(2s_1 + s_2) = -\frac{s_2}{6}. \end{aligned}$$

Ici, on a posé $a_1 = \frac{1}{2}$ donc $s_2 = 3$ et a_2, b_2, c_2, b_1, c_1 se trouvent imédiatement, i.e., $b_1 = 0$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $c_2 = 1$.

2.

Il faut que les points $C(3,3)$, $D(x,y)$ et $E(3,-1)$ soient alignés et que $D(x,y)$ soit compris entre $C(3,3)$ et $E(3,-1)$. L'ensemble des positions du point D est donc le segment de droite délimité par les points $C(3,3)$ et $E(3,-1)$, i.e., l'ensemble des points satisfaisant les 2 relations, $x = 3$, et $y \in [-1,3]$.

II. Intégration numérique (25 points)

Soit l'intégrale suivante,

$$I = \int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

1. (5 points) **Méthode des trapèzes.**
   Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes et en utilisant 4 intervalles, (i.e., pour les points de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$, autres que les bornes, en $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/4$).
2. (5 points) Indiquer le terme d'erreur global que l'on fait par cette méthode numérique d'intégration. Théoriquement, de combien devrait on diminuer le pas d'intégration (i.e., la largeur des intervalles) pour faire une erreur d'approximation 4 fois moins grande ? Justifier votre réponse.
3. (5 points) **Intégration de Romberg.**
   Donner une aproximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes et en utilisant 2 fois moins d'intervalles. Utiliser l'extrapolation de Richardson et l'approximation obtenue à la question 1. pour obtenir (théoriquement) une estimée plus précise de cette intégration.
4. (3 points) La méthode de la quadrature gaussienne avec deux termes donnerait elle la valeur exacte de cette intégrale ? Justifier votre réponse.
5. (7 points) Utiliser la méthode de la quadrature gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I.

Réponse

1.
On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned}
I_{1,4} &= (\pi/8)\Big(f(0) + 2f(\pi/4) + 2f(\pi/2) + 2f(3\pi/4) + f(\pi)\Big),\\
I_{1,4} &= (\pi/8)\Big([1/3] + 2[2/(4+\sqrt{2})] + 2[1/2] + 2[2/(4-\sqrt{2})] + [1]\Big),\\
I_{1,4} &\approx 1.813896.
\end{aligned}$$

2.
Terme d'erreur global $O(h^2)$. Pour diminuer théoriquement l'erreur d'approximation par 4, il faudrait diminuer le pas d'intégration par 2 (car $2^2 = 4$).

3.

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &= (\pi/4)\Big(f(0) + 2f(\pi/2) + f(\pi)\Big),\\
I_{1,2} &= (\pi/4)\Big([1/3] + 2[1/2] + [1]\Big),\\
I_{1,2} &\approx 1.832595.
\end{aligned}$$

Par extrapolation de Richardson, on a,

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &= I_{1,4} + \frac{1}{2^2-1}(I_{1,4} - I_{1,2}),\\
I_{2,2} &= 1.813896 + (1/3)(1.813896 - 1.832595),\\
I_{2,2} &\approx 1.807663.
\end{aligned}$$

4.
Non car $f(\theta)$ n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égale à 3. Le résultat obtenu sera donc une approximation.

5.
En faisant le changement de variable $\theta = \frac{\pi t+\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}, \\
I &= (\pi/2)\int_{-1}^{1} \frac{dt}{2+\cos(\frac{\pi t+\pi}{2})}, \\
I &= (\pi/2)\int_{-1}^{1} \frac{dt}{2-\sin(\frac{\pi t}{2})}, \\
I &\approx (\pi/2)\left(\frac{1}{2-\sin(\frac{\pi(-\sqrt{3}/3)}{2})} + \frac{1}{2-\sin(\frac{\pi(\sqrt{3}/3)}{2})}\right), \\
I &\approx 1.85974.
\end{aligned}
$$

III. Résolution d'équation différentielle (25 points)

1. (5 points) Montrer que la méthode d'Euler modifiée est un cas particulier de la méthode de Runge Kutta.
2. (15 points) Résoudre l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = y(t) - ty^2(t), \tag{1}$$

   avec la condition initale $y(0) = 1$. Utiliser la méthode d'Euler modifiée avec un pas de $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$, $y(0.4)$ et $y(0.6)$.
3. (5 points) Faites le changement de variable $z(t) = (1/y(t))$ et montrer que l'on trouve la relation $z'(t) + z(t) = t$. La solution générale de cette équation différentielle est $z(t) = t - 1 + K\exp(-t)$, avec K une constante. Utiliser cette information et la condition initiale pour déterminer la solution exacte de l'équation différentielle (1).

Réponse

1.
Les relations de Runge Kutta sont les suivantes,

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n,\, y_n), \\
k_2 &= hf(t_n+\alpha h,\, y_n+\beta k_1), \\
y_{n+1} &= y_n + ak_1 + bk_2.
\end{aligned}
$$

Pour $a = b = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \beta = 1$, on a $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f\big(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)\big)\Big)$. En posant $\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, qui correspond à une prédiction donnée par la méthode d'Euler, on trouve finalement les relations d'Euler modifiée,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n),\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big).\end{aligned}$$

2.

On a les relations suivantes,

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y_n + 0.2(y_n - t_n y_n^2),\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{0.2}{2}\big((y_n - t_n y_n^2) + (\tilde{y}_{n+1} - t_{n+1}\tilde{y}_{n+1}^2)\big).\end{aligned}$$

Et le tableau suivant,

t_n	y_n	$\tilde{y}_{n+1}$	y_{n+1}
0.0	1.0	1.2	1.1912
0.2	1.1912	1.3727	1.3443
0.4	1.3443	1.4686	1.4239
0.6	1.4239		

3.

On a $y(t) = \frac{1}{z(t)}$, et donc $y^2(t) = \frac{1}{z^2(t)}$ et $y'(t) = \frac{-z'(t)}{z^2(t)}$. En remplacant dans l'équation différentielle, on trouve la relation $z'(t) + z(t) = t$, dont la solution générale est $z(t) = t - 1 + K\exp(-t)$, avec K une constante. On a donc $y(t) = \frac{1}{t-1+K\exp(-t)}$. En utilisant la condition initiale $y(0) = 1$, on trouve finalement la solution générale exacte,

$$y(t) = \frac{1}{t - 1 + 2\exp(-t)}.$$

IV. Calcul de valeurs et vecteurs propres (25 points)

Soit A la matrice suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1. (5 points) Tracer les disques de Gershgorin et déterminer par cette méthode les intervalles où doivent se trouver les valeurs propres de cette matrice. En supposant qu'il n'existe pas de valeurs propres complexes, donner l'intervalle où doivent se trouver ces valeurs propres.
2. (5 points) Ecriver l'équation caractéristique de A et calculer analytiquement les valeurs propres de A. Donner le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.
3. (15 points) La plus petite valeur propre de A est 1. Calculer les autres valeurs propres de A par la méthode des puissances et déflation (faites seulement 3 itérations). Pour la plus grande valeur propre de A, utiliser la méthode des puissances et le vecteur initial suivant : $x^{[0]} = (1.1, -1.2, -0.8)^t$.
   Pour celle du milieu, utiliser la méthode de déflation et le vecteur initial suivant $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$ et la valeur analytique de la plus grande valeur propre trouvée à la question 2.

Réponse

1. En utilisant les valeurs de chaque ligne de la matrice A, on trouve 3 disques, i.e., $\mathcal{C}_1(centre = 4, r = 1)$, $\mathcal{C}_2(centre = 1, r = 2)$, $\mathcal{C}_3(centre = 1, r = 2)$. Les valeurs propres de cette matrice sont, puisque $C_2 = C_3$, éléments de l'union des disques $S = C_1 \bigcup C_2$.

En utilisant les valeurs de chaque ligne de la matrice A^t, on trouve 3 disques, i.e., $\mathcal{C}'_1(centre = 4, r = 4)$, $\mathcal{C}'_2(centre = 1, r = 0)$, $\mathcal{C}'_3(centre = 1, r = 1)$. Puisque $\mathcal{C}'_2$ et $\mathcal{C}'_3$ sont contenus dans $\mathcal{C}'_1$, Les valeurs propres de cette matrice sont aussi élément de $S^t = \mathcal{C}'_1$.

Finalement, Les valeurs propres de cette matrice sont éléments de $S \cap S^t$. Dans l'hypothèse ou il n'y a pas de valeurs propres complexes, celles-ci sont donc comprises dans l'intervalle $J = [0; 5]$.

2. Equation caractéristique : det $(A - \lambda I)$=0. On trouve donc les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
(4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) &= 0, \\
(1-\lambda)((4-\lambda)(1-\lambda)+2)) &= 0, \\
(1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-2) &= 0.
\end{aligned}$$

Donc trois valeurs propres, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ On vérifie que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in J$. Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre se trouve facilement et on trouve $v_{\lambda_3} = (1, -1, -1)^t$.

3. Les composantes des vecteurs $x^{[p]}$ et la plus grande valeur propre de A, λ_{max}, sont données par la méthode de la puissance, dans le tableau ci dessous.

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_{max}
1	1.00	-0.94	-0.83	3.6
2	1.00	-0.93178	-0.89557	3.16
3	1.00	-0.9457	-0.934	3.10

Après trois itérations, on trouve $\lambda_{max} = 3.1$, (la procédure semble converger vers $\lambda_3 = \lambda_{max} = 3.0$ et le vecteur propre associé à cette valeur maximale semble converger vers $v_{\lambda_{max}} = v_{\lambda_3} = (1, -1, -1)^t$.

On doit considérer la nouvelle matrice,

$$\begin{aligned}
B &= A - \lambda_{max}\frac{x_1 x_1^t}{x_1^t x_1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3.(1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les composantes des vecteurs $x^{[p]}$ et la valeur propre que l'on cherche, λ_2, sont données par la méthode de la puissance, dans le tableau ci dessous.

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_2
1	1.00	-(1/3)	-(1/3)	6
2	1.00	-(1/3)	-(1/3)	2
3	1.00	-(1/3)	-(1/3)	2

La convergence est vite assurée et on trouve $\lambda_2 = 2$.