DIRO
IFT 2421

DÉMONSTRATION N^{o} 7

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

CORRECTION DE L'INTRA

I. Mesure d'incertitude (15 pts)

Calculer l'erreur absolue et relative sur la durée des oscillations d'un pendule simple de longueur l. La période est donnée par la formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

si π= 3.141 à 10^{-3} près (i.e., $\Delta\pi = 10^{-3}$), $l = 1$ m à 10^{-3} près, et $g = 9.81$ ms^{-2} à 10^{-2} près. Donner l'approximation de T et arrondir au nombre de cse adéquat.

Réponse

On a pour valeur approchée

$$T = \frac{6,282}{\sqrt{9.81}} \approx 2.006 \text{ s},$$

On obtient la différentielle suivante

$$\Delta T = \left|2\sqrt{\frac{l}{g}}\right| \Delta\pi + \left|\frac{\pi}{\sqrt{lg}}\right| \Delta l + \left|-\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}\right| \Delta g.$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \qquad \Delta T &= \left|2\sqrt{\frac{1}{9.81}}\right| 10^{-3} + \left|\frac{3.141}{\sqrt{9.81}}\right| 10^{-3} + \left|-\frac{3.141}{9.81}\sqrt{\frac{1}{9.81}}\right| 10^{-2}, \\ \Delta T &\approx 6.39\ 10^{-4} + 1.00\ 10^{-3} + 1.01\ 10^{-3}, \\ \Delta T &\approx 2.65\ 10^{-3}. \end{aligned}$$

On obtient aussi l'erreur relative

$$\frac{\Delta T}{T} = 1.32\ 10^{-3}.$$

On trouve donc (2 cse après la virgule sont conservés) :

$$T = 2.00 \text{ s} \quad \text{avec} \quad \Delta T = 2.65\ 10^{-3}.$$

II. Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (25 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine r de l'équation

$$f(x) = x^3 + x - 1 = 0.$$

1. **Méthode du point fixe**.

(a) En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, montrer que l'intervalle $J_1 = [0, 1]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique est assurée.

(b) Déterminer analytiquement un majorant de $|r_n - r|$, où r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe.

(c) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.

2. **Méthode de Newton-Raphson**.

(a) Soit $g_2(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de cette équation. Donner $g_2(x)$.

(b) Montrer que pour $x > 0$, on a l'inégalité suivante

$$|g_2'(x)| \leq 1.125\,|f(x)|\,.$$

(c) Montrer que l'on a une solution unique sur l'intervalle $J_2 = [0.5, 0.75]$ et que le choix de cet intervalle permet d'assurer la convergence de la méthode de Newton.

(d) Trouver analytiquement une majoration du type

$$|r_{n+1} - r| \leq K\,|r_{n+1} - r_n|\,.$$

(e) En déduire une valeur approchée de r à 10^{-6} près en partant de $r_0 = 1$ et arrondir au nombre adéquat de cse.

Réponse

1.

a. L'étude des variations de la fonction $f(x)$ sur $[0, 1]$ montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle. De plus, on $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle. Les dérivées premières et secondes de $g_1(x)$ s'écrivent

$$g_1' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad g_1'' = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

Il est clair que pour tout $x \in J_1$, on a $|g_1'(x)| < 1$ (car : $2x \leq 1 + x^2 \leq (1 + x^2)^2$). Donc la convergence est assurée.

b. De manière plus précise, en étudiant les variations de $g_1'(x)$, on voit que : $\forall x \in J_1$, $|g_1'(x)| < 0.65$. En effet, on a,

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$g_1''(x)$		$-$	0	$+$	
$g_1'(x)$	0	$\searrow$	m	$\nearrow$	-0.5

avec $m = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx -0.6495$. On a donc la majoration suivante de l'erreur commise en prenant la valeur approchée r_n de r (cf. Cours).

$$|r_n - r| \leq 0.65^n.$$

c. En utilisant la précédente majoration, on aura $|r_n - r| < 10^{-3}$, si $0.65^n < 10^{-3}$, ou $n > \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(0.65)}$, soit pour $n \geq 17$. On obtient,

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1, \\
r_1 &= 0.5, \\
r_2 &= 0.8, \\
r_3 &= 0.60, \\
r_4 &= 0.72, \\
r_5 &= 0.65, \\
r_6 &= 0.70, \\
r_7 &= 0.67, \\
r_8 &= 0.68, \\
r_9 &= 0.67, \\
r_{10} &= 0.685, \\
r_{11} &= 0.680, \\
r_{12} &= 0.683, \\
r_{13} &= 0.681, \\
r_{14} &= 0.6828, \\
r_{15} &= 0.6820, \\
r_{16} &= 0.6825, \\
r_{17} &= 0.6822.
\end{aligned}$$

On a $|r_n - r| < 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-2}$ et donc le résultat s'exprime avec 2 cse après la virgule par $r_{17} = 0.68$.

2.

a. On a

$$g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}.$$

b. $g_2(x)$ a pour dérivée

$$g_2'(x) = \frac{6x(x^3 + x - 1)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{6x}{(3x^2 + 1)^2} f(x).$$

La fonction $h(x) = \frac{6x}{(3x^2+1)^2}$ atteint un maximum égal à 1.125 (pour $x = \frac{1}{3}$), par suite, pour $x > 0$,

$$|g_2'(x)| \leq 1.125 \, |f(x)| \, .$$

c. L'étude des variations de la fonction $f(x)$ sur $J_2 = [0.5, 0.75]$ montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle. De plus, on $f(0.5) = -0.375$ et $f(0.75) = 0.171875$. Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle. On a sur J_2 :

$$-0.375 \leq f(x) \leq 0.172,$$

et par suite,

$$|g_2'(x)| < 0.43,$$

ce qui assure la convergence de cette méthode vers une solution unique.

d. Par suite, on obtient,

$$\frac{1}{|1-g_2'(x)|} < 1.76 \quad \text{sur} \quad J_2.$$

On obtient une majoration du type (cf. Démo 2, exercice 2) :

$$|r_{n+1} - r| \leq 1.76\,|r_{n+1} - r_n|\,.$$

e. En utilisant la précédente majoration, on obtient,

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1, \\
r_1 &= 0.75, \\
r_2 &= 0.6860465116, \\
r_3 &= 0.6823395826, \\
r_4 &= 0.6823278039, \\
r_5 &= 0.6823278038.
\end{aligned}$$

On doit arrêter à la cinquième itération (car $|r_5 - r| \leq 1.76\,|r_5 - r_4| = 1.76 \times 10^{-10} < 10^{-6}$) et on trouve, en arrondissant au nombre de cse adéquat $r_5 = 0.68232$.

III. Convergence linéaire et quadratique (15 pts)

Soit deux méthodes itératives dont la constante asymptotique est $C = 0.75$ et convergeant linéairement pour la première et quadratiquement pour la seconde. Calculer le nombre d'itération minimal pour que l'erreur d'approximation n'excède pas 10^{-8} dans les deux cas sachant que l'erreur à la première itération n'excède pas 0.5 (i.e., $e_0 = 0.5$).

Réponse

On a pour la première et la deuxième méthode respectivement,

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 0.75, \quad \text{et} \quad \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \approx 0.75.$$

Pour la méthode de convergence linéaire, on a,

$$|e_n| \approx 0.75\,|e_{n-1}| \approx (0.75)^2\,|e_{n-2}| \approx \ldots \approx (0.75)^n\,|e_0|\,.$$

Pour la méthode de convergence quadratique, on a

$$|e_n| \approx 0.75\,|e_{n-1}|^2 \approx (0.75)(0.75\,|e_{n-2}|^2)^2 = (0.75)^3\,|e_{n-2}|^4 \approx \ldots \approx (0.75)^{2^n-1}\,|e_0|^{2^n}\,.$$

L'énoncé nous demande de supposer que $|e_0| = 0.5$ dans les deux cas. Pour la méthode de convergence linéaire on a,

$$e_n = (0.75)^n(0.5) \leq 10^{-8} \quad \text{pour} \quad n \geq \frac{\ln 2 - 8\ln 10}{\ln(0.75)} \approx 62.$$

Pour la méthode quadratique on a,

$$\begin{aligned} e_n = (0.75)^{2^n-1}(0.5)^{2^n} &\leq 10^{-8}, \\ e_n = (0.75)^{-1}(0.375)^{2^n} &\leq 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^n &\geq \frac{\ln(0.75) - 8\ln 10}{\ln(0.375)}, \\ n &\geq 4.2535. \end{aligned}$$

On peut remarquer que la méthode de convergence quadratique demande beaucoup moins d'itération que la méthode de convergence linéaire.

IV. Norme de Matrice (5 pts)

Montrer que pour une matrice symétrique A, on a l'égalité suivante,

$$\mathrm{cond(A)}_1 = \mathrm{cond(A)}_\infty.$$

Réponse

Par définition, on a,

$$\mathrm{cond(A)} = \|A\|.\|A^{-1}\|.$$

Pour une matrice symétrique, $A = A^t$, et

$$\|A\|_1 = \|A^t\|_1 = \|A\|_\infty.$$

De plus on a,

$$\|A^{-1}\|_1 = \|(A^t)^{-1}\|_1 = \|(A^{-1})^t\|_1 = \|A^{-1}\|_\infty.$$

Par conséquent, si la matrice est symétrique,

$$\mathrm{cond(A)}_1 = \mathrm{cond(A)}_\infty.$$

V. Factorisation P^tLU avec élimination Gaussienne (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit P^tLU ou P est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et pivotage partiel.
2. Calculer le déterminant de A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ pour $b = (1, 2, 3)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Réponse

1.

On intervertit la ligne 1 et la ligne 3 ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - (-2/3)\text{ligne}_1$ et $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-1/3)\text{ligne}_1$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & (-1/3) & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opération $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-1)\text{ligne}_2$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a donc la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2/3) & 1 & 0 \\ (-1/3) & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{U}.$$

2.

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= \det(\mathrm{P}) \times \det(\mathrm{L}) \times \det(\mathrm{U}), \\ &= -1 \times 1 \times (-6 \times (1/3) \times 2), \\ &= 4. \end{aligned}$$

3.

On doit résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (-2/3) & 1 & 0 \\ (-1/3) & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & (1/3) & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par substitution avant puis arrière on trouve, $Ly = b$ avec $y = (3,\, 4,\, 6)^t$, puis $Ux = y$ avec finalement $x = ((-15/6),\, -6,\, 3)^t$.

VI. Interpolation de lagrange et Newton (20 pts)

Soit les points suivants

x_k	0	1	4	6
y_k	1	-1	1	-1

1. Appliquez la formule de Lagrange pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.
2. Appliquez la formule de Newton pour trouver un polynome de degré trois qui passe par ces points. Evaluez ensuite ce polynome pour $x = 2, 3, 5$.

Réponse

1.

On trouve par Lagrange :

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{-24} - \frac{x(x-4)(x-6)}{15} + \frac{x(x-1)(x-6)}{-24} - \frac{x(x-1)(x-4)}{60}.$$

Pour l'interpolation on trouve,

$$\begin{aligned} P(2) &= -1, \\ P(3) &= 0, \\ P(5) &= 1. \end{aligned}$$

2.

Le tableau des différences divisées s'écrit,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		-2		
1	-1		2/3	
		(2/3)		-(1/6)
4	1		-1/3	
		-1		
6	-1			

On obtient le polynome suivant :

$$P_3(x) = 1 - 2x + (2/3)x(x-1) - (1/6)x(x-1)(x-4).$$

Pour l'interpolation on trouve la même chose que pour lagrange car le polynome de collocation de degré trois est unique.

$$\begin{aligned} P(2) &= -1, \\ P(3) &= 0, \\ P(5) &= 1. \end{aligned}$$