DIRO

EXAMEN FINAL CORRECTION

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationelle, local 2384.
http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *25/04/2001*

I	Dérivation numérique (25 points).
II	Intégration numérique (35 points).
III	Résolution d'équation différentielle (30 points).
IV	Système d'équation différentielle (10 points).

TOUS DOCUMENTS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Dérivation numérique (25 points)

On a calculé la dérivée d'une fonction $f'(\theta)$ en $\theta = 0$ avec une formule de différence en utilisant plusieurs valeurs du pas h. On a obtenu les valeurs suivantes,

h	$f'(0)$
$\pi/4$	0.453131
$\pi/8$	0.240561
$\pi/16$	0.122104
$\pi/32$	0.061282

Sachant que la valeur exacte est $f'(0) = 0$,

1. (10 points) Démontrer (qualitativement) que la méthode utilisée est d'ordre $o(h)$ et donner un exemple de formule d'approximation de dérivé numérique de cet ordre vu en cours. Rappeler comment on peut justifier mathématiquement cette formule d'approximation.
2. (15 points) Appliquer la méthode d'extrapolation de Richardson pour obtenir une amélioration de l'estimation (obtenue dans le cas où $h = \pi/32$) de 2 ordres (i.e., une approximation d'ordre $o(h^3)$ de cette dérivée).

Réponse

1.

L'erreur est divisée par un facteur approximativement égal à deux lorsque le pas est divisé par un facteur égal à deux. C'est ce qui se passe pratiquement lorsque la méthode est d'ordre $o(h)$.

Un exemple de formule d'approximation de dérivé numérique d'ordre $o(h)$ est la formule suivante vue en cours,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{h} + o(h).$$

Que l'on peut justifier mathématiquement par la définition de la limite, grâce à la formule de Taylor, etc. (cf. cours).

2.

Appelons f'_h, l'approximation obtenue en utilisant le pas $h = \pi/32$, f'_{2h}, l'approximation obtenue en utilisant le pas $2h = \pi/16$, etc. Une extrapolation de Richardson utilisant f'_h et f'_{2h} permettra d'obtenir une estimation d'ordre $o(h^2)$, i.e., de gagner un ordre,

$$\begin{aligned} f'_1(0) &= 0.061282 + \frac{1}{2^1 - 1}\{0.061282 - 0.122104\} + o(h^2) \\ f'_1(0) &\approx 4.6\ 10^{-4} + o(h^2). \end{aligned}$$

Même chose en utilisant f'_{2h} et f'_{4h}, cela permettra d'obtenir une estimation d'ordre $o(h^2)$ mais avec moins de précision que précedement,

$$\begin{aligned} f'_2(0) &= 0.122104 + \frac{1}{2^1 - 1}\{0.122104 - 0.240561\} + o(h^2) \\ f'_2(0) &\approx 3.647\ 10^{-3} + o(h^2). \end{aligned}$$

Maintenant, une combinaison de $f'_1(0)$ et $f'_2(0)$ permettra de gagner un deuxième ordre de précision,

$$\begin{aligned} f'_3(0) &= 4.6\ 10^{-4} + \frac{1}{2^2 - 1}\{4.6\ 10^{-4} - 3.647\ 10^{-3}\} + o(h^3) \\ f'_3(0) &\approx -6.02\ 10^{-4} + o(h^3). \end{aligned}$$

II. Intégration numérique (35 points)

Soit l'intégrale suivante,

$$I = \int_0^\pi f(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi (\exp\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

1. (5 points) **Méthode des trapèzes.**
   Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles, (i.e., pour les points de subdivision de l'intervalle $[0, \pi]$, autres que les bornes, en $\pi/4$, $\pi/2$ et $3\pi/4$).
2. (5 points) Indiquer le terme d'erreur global que l'on fait par cette méthode numérique d'intégration. Théoriquement, de combien devrait on diminuer le pas d'intégration (i.e., la largeur des intervalles) pour faire une erreur d'approximation 4 fois moins grande ? Justifier votre réponse.
3. (5 points) **Méthode de Simpson .**
   Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode de Simpson (1/3) (quadratures composites) et en utilisant les 4 intervalles précédents.
4. (5 points) Théoriquement (et en utilisant le terme d'erreur global que l'on fait par cette méthode numérique d'intégration et en le comparant à celui de la méthode des trapèze), de combien a t'on diminuer l'erreur d'approximation ? Indiquer maintenant combien on devrait diminuer le pas d'intégration de la méthode de Simpson (1/3) pour faire une erreur d'approximation 81 fois moins grande que celle obtenue en considérant 4 intervalles (i.e., $h = \pi/4$) ? Justifier votre réponse.
5. (3 points) La méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes donnerait elle la valeur exacte de cette intégrale ? Justifier votre réponse.
6. (7 points) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I. Donner le terme d'erreur de cette méthode.
7. (5 points) On se propose de résoudre analytiquement cette intégrale à l'aide d'une double intégration par partie. La première intégration par partie donne $I = \int_0^\pi \exp(\theta) \sin\theta\, d\theta = [\exp\theta \sin\theta]_0^\pi - \int_0^\pi (\exp\theta)\cos\theta\, d\theta =$ - $\int_0^\pi (\exp\theta)\cos\theta\, d\theta$. Faîte une deuxième intégration par partie sur $\int_0^\pi (\exp\theta)\cos\theta\, d\theta$ et remarquer que vous obtiendrez une constante et I dans le résultats de ce calcul. En déduire la valeur exacte de cette intégrale.

Réponse

1.

On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned}
I_{\text{Trapèze},4} &= (\pi/8)\Big(f(0) + 2f(\pi/4) + 2f(\pi/2) + 2f(3\pi/4) + f(\pi)\Big),\\
I_{\text{Trapèze},4} &= (\pi/8)\Big(0 + 2\exp(\pi/4)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\exp(\pi/2) + 2\exp(3\pi/4)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\Big),\\
I_{\text{Trapèze},4} &\approx 10.855.
\end{aligned}$$

2.

Terme d'erreur global $O(h^2)$. Pour diminuer théoriquement l'erreur d'approximation par 4, il faudrait diminuer le pas d'intégration par 2 (car $2^2 = 4$).

3.

On obtient, par la méthode de Simpson (1/3), (et en réutilisant les valeurs précédemment calculées pour gagner du tps),

$$
\begin{aligned}
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &= (\pi/12)\Big(f(0) + 4f(\pi/4) + 2f(\pi/2) + 4f(3\pi/4) + f(\pi)\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &= (\pi/12)\Big(0 + 4\exp(\pi/4)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\exp(\pi/2) + 4\exp(3\pi/4)\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx 11.955.
\end{aligned}
$$

4.
Le terme d'erreur global étant cette fois-ci de $O(h^4)$, on s'attend en utilisant cette méthode à une erreur au moins $o(h^2)/o(h^4)$ moins importante que la méthode des Trapèzes, i.e., $(\pi/4)^2/(\pi/4)^4 = 1.62$ fois (au) moins importante. Nota : Cela peut paraître pas beaucoup, mais cela vient du fait que $h = \pi/4 \approx 1$ dans ce cas et que cette borne est très pessimiste (cf. question 7 pour comparer la précision des deux méthodes).

Pour faire une erreur 81 fois moins grande avec la méthode de Simpson il faudrait diminuer la pas de 3 (car $3^4 = 81$).

5.
Non car $f(\theta)$ n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égale à 3. Le résultat obtenu sera donc une approximation.

6.
En faisant le changement de variable $\theta = \frac{\pi t + \pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \exp(\theta)\sin\theta\, d\theta,\\
I &= (\pi/2)\int_{-1}^{1} \exp\Big(\frac{\pi t + \pi}{2}\Big)\sin\Big(\frac{\pi t + \pi}{2}\Big)\, dt,\\
I &= (\pi/2)\int_{-1}^{1} \exp\Big(\frac{\pi t + \pi}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi t}{2}\Big)\, dt,\\
I &\approx (\pi/2)\left(\exp\Big(\frac{\pi(-\sqrt{3}/3) + \pi}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi(-\sqrt{3}/3)}{2}\Big) + \exp\Big(\frac{\pi(\sqrt{3}/3) + \pi}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\pi(\sqrt{3}/3)}{2}\Big)\right),\\
I &\approx 11.48.
\end{aligned}
$$

Avec un terme d'erreur égale à $o(h^4)$ (cf. Cours).

7.
La deuxième intégration par partie nous donne,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (\exp\theta)\cos\theta\, d\theta &= [\exp\theta\cos\theta]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (\exp\theta)\sin\theta\, d\theta,\\
&\text{donc}\\
I &= -[\exp\theta\cos\theta]_0^{\pi} - I,\\
I &= -\frac{1}{2}\,[\exp\theta\cos\theta]_0^{\pi},\\
I &= \frac{1}{2}\,(1 + \exp(\pi)),\\
I &\approx 12.07.
\end{aligned}
$$

III. Résolution d'équation différentielle (30 points)

1. (5 points) Donner les formules de Runge-Kutta (développement d'ordre 2) dans le cas particulier où cette méthode équivaut à la méthode d'Euler modifiée. Rappeler aussi la formule de la méthode d'Euler. Rappeler en quoi consiste maintenant géométriquement la méthode d'Euler modifié[1].
2. (15 points)
   (a) Résoudre l'équation différentielle suivante,
   $$y'(t) = f(t, y(t)) = 2y(t) + t^2, \tag{1}$$
   avec la condition initiale $y(0) = 1$ par la méthode d'Euler avec un pas $h = (1/10)$. Calculer seulement $y(0.1)$, $y(0.2)$, et $y(0.3)$ (donner les résultats avec trois décimales).
   (b) Résoudre maintenant cette équation avec la méthode d'Euler modifiée. Calculer seulement $y(0.1)$, $y(0.2)$ et $y(0.3)$ (donner les résultats avec trois décimales).
3. (10 points) Vérifier que $y(t) = K\exp(2t)$ est solution de l'équation différentielle (1) sans second membre (i.e., de l'équation $y'(t) - 2y(t) = 0$). On montre que, dans ce cas, la solution de l'équation complète (1) est $y(t) = K(t)\exp(2t)$ (méthode de la variation de la constante). En remplaçant dans l'équation (1), montrer que l'on trouve $K'(t) = t^2\exp(-2t)$. En se servant de ses informations, de la condition initiale, et du fait que la primitive de $K'(t)$ est $K(t) = -(1/2)t^2\exp(-2t) - (1/2)t\exp(-2t) - (1/4)\exp(-2t)$ à une constante près ; déterminer la solution exacte de l'équation différentielle (1).

Réponse

1.

Les relations de Runge Kutta (développement d'ordre 2) dans le cas particulier où cette méthode équivaut à la méthode d'Euler modifiée et dans le cas d'une équation différentielle du type $y'(t) = f(t, y(t))$, sont les suivantes (cf. cours),

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf(t_n + h, y_n + k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Les relations de la méthode d'Euler sont (cf. cours),

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

Géométriquement, la méthode d'Euler modifiée consiste à remplacer sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la courbe par la demi-somme des pentes des tangentes en M_0 et M_1 (cf. courbe 1). Cette demi-somme est aussi égale à la pente de M_0 et M_1 (propriété de la parabole) (cf. courbe 1).

2a.

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous,

t_n	y_n	$f(t_n, y_n)$
0	1	2
0.1	1.2	2.41
0.2	1.441	2.922
0.3	1.733	3.556

[1] On rappelle que, dans le cas de la méthode d'Euler simple (ou non modifié), on rappelle que, géométriquement, cette méthode consiste à remplacer sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ la courbe par sa tangente au point M_i d'abscisse t_i.

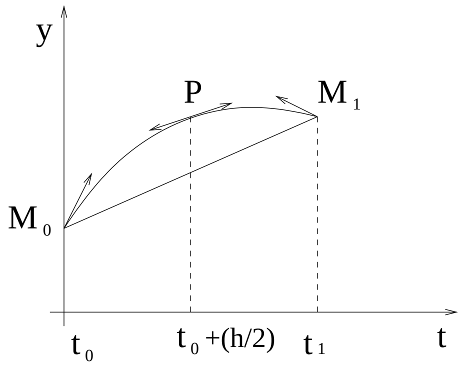

FIG. 1 –

2b.
Les valeurs de t_n, y_n, k_1, k_2 sont portées dans le tableau ci dessous ;

t_n	y_n	k_1	k_2
0	1	0.2	0.241
0.1	1.220	0.245	0.297
0.2	1.492	0.302	0.368
0.3	1.827	0.374	0.456

3.
La vérification est immédiate,

$$2K\exp(2t) - 2K\exp(2t) = 0.$$

Remplaçons dans l'équation (1), $y(t) = K(t)\exp(2t)$,

$$\begin{aligned} K'(t)\exp(2t) + 2\exp(2t)K(t) - 2K(t)\exp(2t) &= t^2, \\ K'(t) &= t^2\exp(-2t). \end{aligned}$$

La solution de l'équation (1) est donc de la forme,

$$\begin{aligned} y(t) &= K(t)\exp(2t), \\ y(t) &= \left\{-(1/2)t^2\exp(-2t) - (1/2)t\exp(-2t) - (1/4)\exp(-2t) + \mathrm{C}^{st}\right\}\exp(2t), \\ y(t) &= -(1/2)t^2 - (1/2)t - (1/4) + \mathrm{C}^{st}\exp(2t), \end{aligned}$$

En se servant de la condition initiale $y(0) = 1$, on trouve C^{st} et,

$$y(t) = (5/4)\exp(2t) - (1/2)t^2 - (1/2)t - (1/4).$$

Le calcul analytique de la solution de cette équation différentielle nous permet de savoir si on ne s'est pas trompé dans l'estimation de $y(0.1)$, $y(0.2)$, et $y(0.3)$ de la question 2. Analytiquement, on trouve $y(0.3) \approx 1.8326$.

IV. Système d'équation différentielle (15 points)

Soit le système d'équation différentielles suivant,

$$\begin{aligned} y''(t) &= t^2 - y'(t) - z^2(t), \\ z''(t) &= t + z'(t) + y^3(t). \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales). Rappelez l'utilité de faire une telle opération.

Réponse

En faisant le changement de variable approprié (i.e., en posant $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t)$, $y_3(t) = z(t)$ et $y_4(t) = z'(t)$) on trouve,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= t^2 - y_2(t) - y_3^2(t), \\ y_3'(t) &= y_4(t), \\ y_4'(t) &= t + y_4(t) + y_1^3(t). \end{aligned}$$

avec les conditions initiales suivantes, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$, $y_4(0) = 0$. On rappelle qu'avec ce changement de variable, on cherche maintenant $y_1(t) = y(t)$ et $y_3(t) = z(t)$.

On rappelle qu'une telle opération est nécessaire pour résoudre ce système d'équation par l'une des méthodes vues en cours.