DIRO
IFT 2421

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384/2377.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *27/02/2001*

I	Mesure d'incertitude (15 pts).
II	Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (20 pts).
III	Méthode de la sécante (10 pts).
IV	Méthode de Newton et critère de convergence (15 pts).
V	Factorisation LU avec élimination Gaussienne (20 pts).
VI	Interpolation de Lagrange et Newton (20 pts).

I. Mesure d'incertitude (15 pts)

Calculer l'erreur absolue et relative commise sur $P = UI \cos\phi$ (mesure exprimée en Watts), lorsque,

$$\begin{aligned} U &= 110 \ \text{Volts à } 0.5 \text{ V près, (i.e.,} \Delta U = 0.5), \\ I &= 5 \ \text{Ampères à } 0{,}01 \text{ A près,} \\ \phi &= 0.1 \ \text{Radian à } 10^{-3} \ \text{près.} \end{aligned}$$

Donner l'approximation de P (i.e., P^*) et souligner les chiffres significatifs "exacts" (cse) de ce résultat. Arrondir cette approximation au nombre de cse adéquat.

Réponse

On a pour valeur approchée,

$$P^* = 110 \times 5 \times \cos(0.1) \approx 547.252 \text{ Watts.}$$

On obtient la différentielle suivante,

$$\Delta P = |I \cos\phi| \ \Delta U \ + |U \cos\phi| \ \Delta I \ + |-UI \sin\phi| \, \Delta\phi.$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \qquad \Delta P &= |5 \cos(0.1)| \, 0.5 + |110 \cos(0.1)| \, 0.01 + |-110 \times 5 \sin(0.1)| \, 10^{-3}, \\ &\approx 2.4875 + 1.0954 + 0.0549, \\ &\approx 3.638. \end{aligned}$$

On obtient aussi l'erreur relative,

$$\frac{\Delta P}{P} \approx 6.64 \ 10^{-3}.$$

C'est à dire (0.66% d'erreur). On trouve donc (seul les deux premiers chiffres sont significatifs car ($\Delta P < 0.5 \ 10^1$)),

$$P \approx \underline{54}7 \text{ Watts avec } \Delta P \approx 3.6 < 0.5 \ 10^1.$$

Si on arrondi cette estimation au nombre de cse, on obtient,

$$P \approx 550 \ \pm 5 \text{ Watts.}$$

II. Méthode du point fixe et de Newton-Raphson (20 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine r de l'équation,

$$f(x) = x - \exp(-2x) = 0. \tag{1}$$

1. **Méthode du point fixe**.
   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette équation dans l'intervalle $J_1 = [0, 1]$. En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \exp(-2x)$, montrer que l'intervalle $J_1 = [0, 1]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique par la méthode du pont fixe n'est pas assurée.

(b) On se propose maintenant de réécrire l'équation (1) sous la forme suivante,

$$x = g_2(x) = \frac{\lambda x + \exp(-2x)}{1+\lambda}, \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

Vérifier que cette Équation est identique à l'Équation (1) pour tout λ. Donner les valeurs de λ permettant de faire converger la méthode du point fixe J_1 vers une solution unique.

(c) En prenant $\lambda = 1$, donner la relation itérative $r_{n+1} = g_3(r_n)$ permettant d'obtenir la solution par la méthode du point fixe.

(d) Déterminer analytiquement un majorant de $|r_n - r|$, où r_n désigne la valeur approchée, à la nième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe.

(e) En déduire le nombre d'itérations (au pire) que l'on sera obligé de faire pour obtenir une valeur approchée de r à 10^{-5} près. Donner les 8 premières estimations données par la méthode du point fixe en partant de $r_0 = 0$ et arrondir l'estimée finale (r_8) au nombre adéquat de cse selon la borne obtenue en (d).

2. **Méthode de Newton**.

(a) Soit $g_4(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de cette équation. Donner $g_4(x)$ (i.e., donner la relation itérative $r_{n+1} = g_4(r_n)$).

(b) Nous allons supposer que les conditions sur g_4 et sa dérivée sont remplies pour la convergence de cette méthode vers une solution unique. En déduire une valeur approchée de r après 5 itérations. En supposant que cette estimation nous donne la racine cherchée à 10^{-5} près, arrondir au nombre adéquat de cse.

Réponse

a. L'étude des variations de la fonction $f(x)$ sur $[0,1]$ montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle ($f'(x) = 1 + 2\exp(-2x)$ et $f'(x) > 0\ \forall x \in [0,1]$). De plus, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 - \exp(-2) \approx 0.86$. Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle. La dérivée première de $g_1(x)$ s'écrit,

$$g_1'(x) = -2\exp(-2x).$$

Il est clair que $g_1'(x) \in [-2, -2e^{-2}]$ pour $x \in [0,1]$. La fonction $g_1(x)$ n'est donc pas contractante sur J_1 (i.e., $|g_1'(x)| \not< 1\ \forall x \in J_1$) et donc la convergence n'est pas assurée dans ce cas.

b. La vérification est immédiate, on a,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda x + \exp(-2x)}{1+\lambda}, \\ x(1+\lambda) &= \lambda x + \exp(-2x), \\ x - \exp(-2x) &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée première de $g_2(x)$ s'écrit,

$$g_2'(x) = \frac{\lambda - 2\exp(-2x)}{\lambda+1}.$$

$$\forall x \in [0,1], \quad -2 \le -2\exp(-2x) \le -2\exp(-2) \le 0$$

$$\text{Donc,} \quad \frac{\lambda-2}{\lambda+1} \le \frac{\lambda - 2\exp(-2x)}{\lambda+1} \le \frac{\lambda - 2\exp(-2)}{\lambda+1} \le \frac{\lambda}{\lambda+1} < 1,$$

$$\text{On a donc, pour } \lambda > 0, \quad |g_2'(x)| < 1 \quad \text{dès que} \quad \frac{\lambda-2}{1+\lambda} > -1 \quad \text{soit pour} \quad \lambda > \frac{1}{2}.$$

c. En prenant $\lambda = 1$, on trouve la relation itérative suivante,

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\big(r_n + \exp(-2r_n)\big).$$

d.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad 1 \geq \exp(-2x) \geq 0 \\ \text{Donc,} \quad -1/2 \leq \frac{1 - 2\exp(-2x)}{2} \leq 1/2 \\ \text{i.e.,} \quad -1/2 \leq g_2'(x) \leq 1/2 \\ \text{i.e.,} \quad |g_2'(x)| \leq 1/2 \end{aligned}$$

On a donc la majoration suivante de l'erreur commise en prenant la valeur approchée r_n de r (cf. Cours).

$$|r_n - r| \leq 0.5^n.$$

e. En utilisant la précédente majoration, on aura $|r_n - r| < 10^{-5}$, si $0.5^n < 10^{-5}$, ou $n > \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0.5)}$, soit (au pire) pour $n \geq 17$. On obtient,

$$\begin{aligned} r_0 &= 0, \\ r_1 &= 0.5, \\ r_2 &= 0.433940, \\ r_3 &= 0.426890, \\ r_4 &= 0.426346, \\ r_5 &= 0.426306, \\ r_6 &= 0.426303, \\ r_7 &= 0.426302, \\ r_8 &= 0.426302, \\ &\ldots \end{aligned}$$

On a $(0.5)^8 = 0.0039 < 0.5\ 10^{-2}$. Donc on a le résultat s'exprimant (de facon très pessimiste car cette borne visiblement l'est aussi) avec 2 cse après la virgule par $r = 0.42$.

2.

a. On a,

$$g_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \exp(-2x)}{1 + 2\exp(-2x)}$$

On a donc la formule itérative suivante,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{r_n - \exp(-2r_n)}{1 + 2\exp(-2r_n)}$$

On suppose que $|g_4'(x)| < 1$ pour tout $x \in [r_0, r_1, \ldots, r_n]$ ce qui assure la convergence de l'algorithme comme nous le suppose l'énoncé et on obtient,

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 0, \\
r_1 &= 0.333333, \\
r_2 &= 0.426295, \\
r_3 &= 0.426294, \\
r_4 &= 0.426303, \\
r_5 &= 0.426303. \\
\ldots
\end{aligned}
$$

On suppose que $|r_8 - r| < 10^{-5} < 0.5 \times 10^{-4}$ et donc le résultat s'exprime avec 4 cse après la virgule par $r = 0.4263$.

III. Méthode de la sécante (10 pts)

1. Rappeler la relation itérative de la méthode de la sécante pour la résolution d'une équation du type $f(x) = 0$.
2. Montrer que cette relation itérative est équivalente à celle de la méthode itérative de Newton lorsque les deux points utilisés dans la méthode de la sécante tendent (en position) l'un vers l'autre.

Réponse

1. La relation itérative de la méthode de la sécante est,

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\,\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

2. Écrivons $x_2 = x_1 + \epsilon$ avec $\epsilon \to 0$. Sous cette condition, la relation itérative de la méthode de la sécante permet d'écrire,

$$
\begin{aligned}
x_3 &= x_1 + \epsilon - f(x_1 + \epsilon)\,\frac{x_1 + \epsilon - x_1}{f(x_1 + \epsilon) - f(x_1)}, \\
x_3 &= x_1 + \epsilon - \frac{f(x_1 + \epsilon)}{\frac{f(x_1+\epsilon) - f(x_1)}{\epsilon}}.
\end{aligned}
$$

Lorsque $\epsilon \to 0$, $\frac{f(x_1+\epsilon)-f(x_1)}{\epsilon} = f'(x_1)$ et $f(x_1 + \epsilon) = f(x_1)$ on trouve, donc,

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

x_3 est la solution estimé à l'itération courante en utilisant la solution estimée à l'itération précédente, on retrouve bien la relation itérative de Newton, i.e.,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

IV. Méthode de Newton et critère de convergence (15 pts)

1. Donner la relation itérative de Newton pour la résolution de l'équation suivante,

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0.$$

2. Trouver la valeur à la convergence (r) de cette série itérative.
3. Montrer que les itérations données par cette méthode satisfait l'équation suivante avec a réel et positif,

$$(r_{n+1} - \frac{1}{a}) = -a(r_n - \frac{1}{a})^2, \quad k = 0, 1, \ldots$$

4. Montrer alors que si la série itérative converge vers $1/a$, la convergence de cette méthode est quadratique (i.e., d'ordre 2) avec une constante asymptotique égale à $|a|$.

Réponse

1. La relation itérative de Newton est,

$$r_{n+1} = r_n - f(r_n)/f'(r_n), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Sachant que $f(x) = a - \frac{1}{x}$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{a - 1/r_n}{1/r_n^2}, \\ &= r_n - (ar_n^2 - r_n) = r_n(2 - ar_n). \end{aligned}$$

2. À la convergence, on a $r_{n+1} = r_n = r$. En remplaçant dans la relation itérative précédente, on trouve,

$$\begin{aligned} r &= r(2 - a\,r), \\ 1 &= (2 - a\,r), \\ r &= 1/a. \end{aligned}$$

3. On vérifie que l'on a bien la relation donnée en remplaçant r_{n+1} par $r_n(2 - ar_n)$, i.e.,

$$\begin{aligned} (r_{n+1} - 1/a) = r_n(2 - ar_n) - \frac{1}{a} &= -a(r_n^2 - \frac{2r_n}{a} + \frac{1}{a^2}), \\ &= -a(r_n - \frac{1}{a})^2. \end{aligned}$$

4. On trouve,

$$\frac{|r_{n+1} - \frac{1}{a}|}{|r_n - \frac{1}{a}|^2} = |a|.$$

qui par définition montre que si la série converge vers $1/a$ (et c'est le cas), la convergence est quadratique (i.e., d'ordre 2) avec une constante asymptotique de $|a|$.

V. Factorisation LU avec élimination Gaussienne (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU par la méthode d'élimination de Gauss (sans pivotage partiel ou total).
2. Calculer le déterminant de A.
3. Résoudre le système $Ax = b$ pour $b = (3, 0, -5)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse

1. L'opération $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - (1/2)\ \text{ligne}_1$ et $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-1/2)\ \text{ligne}_1$ donne,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & (3/2) & (-5/2) \\ 0 & (-5/2) & (5/2) \end{pmatrix}.$$

L'opération $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - \frac{(-5/2)}{(3/2)})\ \text{ligne}_2$, i.e., $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (-5/3)\ \text{ligne}_2$ donne,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & (3/2) & (-5/2) \\ 0 & 0 & (-5/3) \end{pmatrix}.$$

On a donc la décomposition suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1/2) & 1 & 0 \\ (-1/2) & (-5/3) & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & (3/2) & (-5/2) \\ 0 & 0 & (-5/3) \end{pmatrix}}_{U}.$$

2.

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= \det(\mathrm{L}) \times \det(\mathrm{U}), \\ &= 1 \times (2 \times (3/2) \times (-5/3)), \\ &= -5. \end{aligned}$$

3.
On doit résoudre le système suivant,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1/2) & 1 & 0 \\ (-1/2) & (-5/3) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & (3/2) & (-5/2) \\ 0 & 0 & (-5/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Par substitution avant puis arrière on trouve, $Ly = b$ avec $y = (3, (-3/2), -6)^t$, puis $Ux = y$ avec finalement $x = ((-14/10), 5, (18/5))^t$.

VI. Interpolation de Lagrange et Newton (20 pts)

Soit les points suivants,

x_k	0	1	4	7
y_k	1	-2	1	2

1. Appliquez la formule de Lagrange pour trouver un polynôme de degré trois qui passe par ces points. Évaluez ensuite ce polynôme pour $x = 2, 3, 5$.
2. Appliquez la formule de Newton pour trouver un polynôme de degré trois qui passe par ces points. Évaluez ensuite ce polynôme pour $x = 2, 3, 5$.
3. Ces évaluations (par la méthode de Lagrange et Newton) sont elles identiques ? Justifier pourquoi.

Réponse

1.

On trouve par Lagrange,

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-7)}{-28} + \frac{x(x-4)(x-7)}{-9} + \frac{x(x-1)(x-7)}{-36} + \frac{x(x-1)(x-4)}{63}.$$

Pour l'interpolation on trouve,

$$\begin{aligned} P(2) &= -2.365, \\ P(3) &= -1.047, \\ P(5) &= 2.825. \end{aligned}$$

2-3.

Le tableau des différences divisées s'écrit,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		-3		
1	-2		1	
		1		(-10/63)
4	1		-1/9	
		(1/3)		
7	2			

On obtient le polynôme suivant,

$$P_3(x) = 1 - 3x + x(x-1) - (10/63)x(x-1)(x-4).$$

Pour l'interpolation on trouve la même chose que pour Lagrange car le polynôme de collocation de degré trois est unique.

$$\begin{aligned} P(2) &= -2.365, \\ P(3) &= -1.047, \\ P(5) &= 2.825. \end{aligned}$$