DIRO
IFT 2421

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384/2377.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *17/04/2002*

I	Dérivation Numérique (25 points).
II	Intégration Numérique (30 pts).
III	Résolution d'équation différentielle (25 pts).
IV	Calcul de valeurs et vecteurs propres (20 pts).

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Dérivation Numérique (25 pts)

Soit la formule de différence suivante,

$$\frac{1}{h}[f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-h)]. \tag{1}$$

Le but des trois premières questions est de trouver ce que cette formule approxime et de vérifier l'intérêt de cette approximation.

1. Trouver le développement limité d'ordre 2 de $f(x_0+2h)$ $(= f(x_2) = f_2)$ au voisinage de $x = x_0$. Trouver aussi le développement limité d'ordre 3 de $f(x_0-h)$ $(= f(x_{-1}) = f_{-1})$ au voisinage de $x = x_0$. <**5 pts**>
2. En déduire ce qu'approxime la formule de différence exprimée en (1) et donner l'ordre de cette approximation. <**5 pts**>
3. Rappeler (cf. Cours) la formule d'approximation de $f'(x_0)$ d'ordre 1 (i.e., celle dont le terme d'erreur est en $O(h)$). Numériquement, pensez vous que la formule de différence exprimée en (1) soit intéressante comparativement à la formule connue du même ordre. Justifier votre réponse. <**5 pts**>
4. Trouver une (la meilleur possible) formule de différence utilisant les terme $f(x_0+2h)$, $f(x_0)$, $f(x_0-h)$ permettant d'avoir une approximation de $f''(x_0)$ et donner l'ordre de cette approximation. <**5 pts**>
5. Soit la formule d'approximation suivante utilisant 2 termes $f(x_0+h)$ et $f(x_0)$.

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)] + \underbrace{O(h)}_{-\frac{h}{2}f''(x_0)+O(h^2)} .$$

   Utiliser cette formule d'approximation et la formule d'approximation équivalente obtenue avec pas de largeur $h' = 2h$ avec la technique d'extrapolation de Richardson pour proposer une formule de différence plus précise utilisant 3 termes. Donner l'ordre de cette nouvelle formule approximation. <**5 pts**>

Réponse

1. On a les développements limités suivants,

$$\begin{aligned} f(x_0+2h) &= f(x_0) + \frac{2h}{1!}f'(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_0) + O(h^3), \ < \mathbf{2.5pts} > \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + O(h^3). < \mathbf{2.5pts} > \end{aligned}$$

2. On en déduit ce qu'approxime la formule de différence exprimée en (1),

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-h)] &= \frac{1}{h}\big(hf'(x_0)+O(h^2)\big), \\ &= f'(x_0)+O(h). \end{aligned}$$

Cette formule approxime donc la dérivée première en x_o <**3 pts**> au premier ordre <**2 pts**>.

3. On rappelle que la formule d'approximation de $f'(x_0)$ d'ordre 1 est $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + O(h)$. <**2 pts**>

Comparativement à la formule connue (du même ordre), la formule exprimée en (1) est moins intéressante car le coût calculatoire y est plus important. <**3 pts**>

4. Les développements limités, écrits en **1.** nous permettent facilement de trouver une relation du type,

$$f''(x_0) = \frac{1}{3h^2}[f(x_0+2h)-3f(x_0)+2f(x_0-h)] + O(h). < \mathbf{5pts} >$$

5. On a,

$$
\begin{aligned}
f'_{1,h}(x_0) &= \frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)]+O(h), \quad < \textbf{1pt} > \\
f'_{1,2h}(x_0) &= \frac{1}{2h}[f(x_0+2h)-f(x_0)]+O(2h). \quad < \textbf{1pt} >
\end{aligned}
$$

Et la formule d'Extrapolation de Richardson ;

$$
\begin{aligned}
f'_{2,2h}(x_0) &= f'_{1,h}(x_0)+\frac{1}{2^1-1}\big(f'_{1,h}(x_0)-f'_{1,2h}(x_0)\big), \\
&= 2f'_{1,h}(x_0)-f'_{1,2h}(x_0). \quad < \textbf{2pts} >
\end{aligned}
$$

Après développement, on trouve,

$$
f'_{2,2h}(x_0)=\frac{1}{2h}[-f(x_0+2h)+4f(x_0+h)-3f(x_0)]+O(h^2). \quad < \textbf{1pt} >
$$

II. Intégration Numérique (30 pts)

Soit l'intégrale suivante,

$$
I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^3\exp(-x)\,dx. \tag{2}
$$

1. **Méthode des trapèzes.**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles. $<$**5 pts**$>$
      i. Est-il plus intéressant, en terme de précision, d'utiliser cette méthode des trapèzes (avec 4 intervalles) ou d'utiliser la méthode de Simpson 1/3 avec 2 intervalles ? Justifier votre réponse (Nota : on utilisera comme erreur d'approximation des estimations, l'ordre $O(.)$ de chaque méthode). $<$**2 pts**$>$

      ii. Est-il plus intéressant, en terme de précision, d'utiliser cette méthode des trapèzes (avec 4 intervalles) ou d'utiliser une méthode de Simpson 3/8 avec 3 intervalles. $<$**2 pts**$>$

      iii. Est-il plus intéressant, en terme de précision, d'utiliser la méthode de Simpson 1/3 avec 2 intervalles ou la méthode de Simpson 3/8 avec 3 intervalles. $<$**1 pts**$>$

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes.**
   On rappelle que cette méthode dit que,

$$
I_Q=f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)+f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big),
$$

   est une approximation de l'intégrale suivante,

$$
I=\int_{-1}^1 f(x)\,dx.
$$

   (a) Montrer que cette méthode permet d'avoir non pas une approximation mais une valeur exacte pour les fonctions suivantes $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ et seulement une approximation pour la fonction $f(x)=x^4$ (i.e., comparer la valeur donnée par l'intégrale exacte et sa valeur donnée par la méthode de la quadrature Gaussienne). $<$**5 pts**$>$

(b) En supposant que le terme d'erreur est de la forme,

$$|I_Q - I| = Cf^{(q)}(\xi).$$

Trouver q et C. Justifier votre réponse. (Nota : $f^{(q)}$ désigne la dérivée $q - ieme$ de $f(x)$). <**2.5 pts**>

(c) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 x^3 \exp(-x)\, dx$. <**5 pts**>

(d) Si vous vouliez augmenter la précision de cette estimation, quelle solution serait, d'après vous, la plus judicieuse (en terme de précision) ? 1- Utiliser une méthode de quadrature Gaussienne avec plus de termes ou 2- utiliser une méthode composite combinant plusieurs Quadratures Gaussiennes avec un nombre plus limité de termes. Justifier votre réponse. <**2.5 pts**>

3. **Méthode analytique itérative.**
Soit $I(n)$, l'intégrale $I = \int_0^1 x^n \exp(-x)\, dx$. Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(3) = \int_0^1 x^3 \exp(-x)\, dx$. On se propose de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative.

(a) Montrer avec une intégration par partie que nous avons la relation $I(n) = -\exp(-1) + nI(n-1)$. <**2 pts**>

(b) Calculer $I(0) = \int_0^1 \exp(-x)\, dx$ analytiquement. <**1 pt**>

(c) En déduire ce que l'on cherche, i.e., $I(3)$ (Calculer $I(1)$, puis $I(2)$ puis finalement $I(3)$ grâce à la relation donnée en 3.(a). <**2 pts**>

Réponse

1.a
On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned}
I_{1,4} &= (1/8)\Big(f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)\Big), \quad < \textbf{3pts} > \\
I_{1,4} &= (1/8)\Big(0 + 0.0243375 + 0.1516326 + 0.398559 + 0.367879\Big), \\
I_{1,4} &\approx 0.11780. \quad < \textbf{2pts} >
\end{aligned}$$

1.b

1. Pour la méthode des trapèzes (quadratures composites), on a $O(h^2)$ avec $h_{\text{Trap}} = 0.25$ et pour la méthode de Simpson 1/3 (quadrature simple), on a $O(h^5)$ avec $h_{\text{Simp}[1/3]} = 0.5$. Puisque $h^2_{\text{Trap}} > h^5_{\text{Simp}[1/3]}$, il est preférable d'utiliser la méthode de Simpson 1/3 (quadrature simple). <**2 pts**>
2. Dans le cas où on prendrait la méthode de Simpson 3/8, on aurait $h_{\text{Simp}[3/8]} = 1/3$ et on aurait $h^5_{\text{Simp}[3/8]} < h^2_{\text{Trap}}$, il est donc plus avantageux de prendre la méthode de Simpson 3/8. <**2 pts**>
3. $(h_{\text{Simp}[3/8]} = 0.33)^5 < (h_{\text{Simp}[1/3]} = 0.5)^5$. Il est donc plus avantageux de prendre la méthode de Simpson 3/8. <**1 pt**>

2.a

Si $f(x) = 1$, on a $I = [x]_{-1}^1 = 2$ et $I_Q = 1 + 1 = 2 = I$. $< \textbf{1pt} >$

Si $f(x) = x$, on a $I = [x^2/2]_{-1}^1 = 0$ et $I_Q = -1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} = 0 = I$. $< \textbf{1pt} >$

Si $f(x) = x^2$, on a $I = [x^3/3]_{-1}^1 = 2/3$ et $I_Q = 1/3 + 1/3 = 2/3 = I$. $< \textbf{1pt} >$

Si $f(x) = x^3$, on a $I = [x^4/4]_{-1}^1 = 0$ et $I_Q = -1/3\sqrt{3} + 1/3\sqrt{3} = 0 = I$. $< \textbf{1pt} >$

Si $f(x) = x^4$, on a $I = [x^5/5]_{-1}^1 = 2/5$ et $I_Q = 1/9 + 1/9 = 2/9 \neq I$. $< \textbf{1pt} >$

2.b

Puisque la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes est exacte pour tout polynôme de degré supérieur ou égale à 3. Donc $q = 4$ (i.e., $Cf^{(q=4)}(\xi) = 0$ pour tout polynome de degré ≤ 3) <**1 pt**>. À partir des résultats ci-dessus, et avec $f(x) = x^4$, nous avons,

$$\begin{aligned} C4! &= I - \text{approximation} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}, \\ C &= \frac{1}{135}. \quad < \mathbf{1.5pts} > \end{aligned}$$

et finalement le terme d'erreur est $C = \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$.

2.c

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, <**1 pt**>, nous obtenons,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3 \exp(-x)\, dx, \\ &= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 (t+1)^3 \exp(-\frac{1}{2}(t+1))\, dt, \quad < \mathbf{1.5pts} > \\ &= \frac{1}{16}\Big(((-\sqrt{3}/3)+1)^3 \exp(-\frac{1}{2}((-\sqrt{3}/3)+1)) + ((\sqrt{3}/3)+1)^3 \exp(-\frac{1}{2}((\sqrt{3}/3)+1))\Big), \quad < \mathbf{1.5pts} > \\ &\approx \frac{1}{16}(0.06111735725 + 1.783475606), \\ &\approx 0.115287. \quad < \mathbf{1pt} > \end{aligned}$$

2.d

Dans la cas d'une fonction non polynômial à intégrer, la méthode la plus judicieuse serait d'utiliser une méthode composite combinant plusieurs Quadratures Gaussiennes avec un nombre plus limité de termes. En faisant de la sorte, on approxime la courbe sur chaque sous domaine d'intégration par un polynôme d'ordre moins élevé que la méthode qui consisterait à utiliser une méthode de quadrature Gaussienne avec plus de termes. Un polynôme d'ordre élevé introduirait en effet d'importantes oscillations qui se traduirait par une moins bonne précision. <**2.5 pts**>

3.a

On a en faisant une intégration par partie,

$$I(n) = \int_0^1 x^n \exp(-x)\; dx = [-x^n \exp(-x)]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} \exp(-x)\, dx = -\exp(-1) + nI(n-1). \quad < \mathbf{2pts} >$$

La relation est vraie pour $n > 0$.

3.b

$$I(0) = \int_0^1 \exp(-x)\, dx = [-\exp(-x)]_0^1 = 1 - \exp(-1). \quad < \mathbf{1pt} >$$

3.c

On a $I(1) = -\exp(-1) + I_0 = -\exp(-1) + 1 - \exp(-1) = 1 - 2\exp(-1)$, <**0.5 pt**>
puis $I(2) = -\exp(-1) + 2I_1 = -\exp(-1) + 2(1 - 2\exp(-1)) = 2 - 5\exp(-1)$, <**0.5 pt**>
puis $I(3) = -\exp(-1) + 3I_2 = 6 - 16\exp(-1)$.
Donc $I(3) = \int_0^1 x^3 \exp(-x)\, dx \approx 0.1139289413$. <**1 pt**>

III. Résolution d'équation différentielle (25 pts)

Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{y(t)}{t^2}, \tag{3}$$

avec la condition initiale $y(1) = 1$.

1. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$ et $y(1.3)$ (donner les résultats avec trois décimales). $<$**5 pts**$>$
2. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler modifiée. Calculer seulement $y(1.1)$ et $y(1.2)$ (donner les résultats avec trois décimales). $<$**5 pts**$>$
3. Quelle serait la stratégie la plus intéressante (en terme de coût calculatoire (en évaluant seulement le nombre d'évaluation de la fonction) et de précision d'estimation) ; divisé le pas h par un facteur 2 et utiliser la méthode d'Euler modifié ou conservé le pas $h = 0.1$ et utiliser la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 ? Justifier votre réponse. $<$**5 pts**$>$
4. Montrer que cette équation différentielle peut s'écrire aussi $dy/y = dt/t^2$. Intégrer les deux membres de cette égalité et en déduire, considérant la condition initiale $y(1) = 1$, la solution analytique de cette équation différentielle. $<$**5 pts**$>$
5. Soit la méthode Runge Kutta d'ordre 2 de type II. Expliquer géométriquement (en utilisant la notion de pente à la courbe $y(t)$) en quoi consiste cette méthode et quelle est sa différence avec la méthode d'Euler modifiée. Justifier votre réponse. $<$**5 pts**$>$

Réponse

1.

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous,

t_n	y_n	$f(t_n, y_n)$
1	1	1
1.1	1.1	0.909
1.2	1.191	0.827
1.3	1.274	-

$<$**5 pts**$>$

2.

La méthode d'Euler modifiée est équivalente à la méthode de Runge Kutta d'ordre II et de type I (cf. cours). Les valeurs de t_n, y_n, k_1, k_2 sont portées dans le tableau ci dessous ;

t_n	y_n	k_1	k_2
1	1	1	0.909
1.1	1.095	0.905	0.823
1.2	1.182	-	-

$<$**5 pts**$>$

3.

Si on divise h par un facteur de 2 (i.e., $h = 0.05$) et si on conserve la méthode d'Euler modifiée, le nombre d'opérations pour évaluer $y(0.1)$ par exemple serait de 2 opérations * 2 itérations = 4 (en ne comptant que les évaluations de fonctions) et le terme de précision global serait de $h^2 = 0.05^2$. $<$**1.5 pts**$>$

Pour un $h = 0.1$, le nombre d'opérations pour évaluer un point de la courbe sera de 4 opérations * 1 itération = 4 (en ne comptant que les évaluations de fonctions) et le terme de précision global serait de $h^4 = 0.1^4$ qui est plus petit que celui de la méthode précédente. $<$**1.5 pts**$>$

En conclusion, pour un même nombre d'opérations, on a tout intérêt à utiliser la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 car la précision d'estimation obtenue est plus grande. <**2 pts**>

4.

En posant $y' = dy/dt$, on trouve facilement

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t^2}. \quad < \textbf{1pt} >$$

En intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dt}{t^2}, \\ \ln|y| &= -\frac{1}{t} + \mathrm{C}, \\ |y| &= k\exp(-1/t), \\ y &= \pm k\exp(-1/t). \quad < \textbf{2pts} > \end{aligned}$$

$\pm k$ étant une constante arbitraire que l'on peut appeler K. la solution s'écrira donc plus simplement $y(t) = K\exp(-1/t)$. En se servant de la condition initiale $y(1) = 1$, on trouve $K = e$, et,

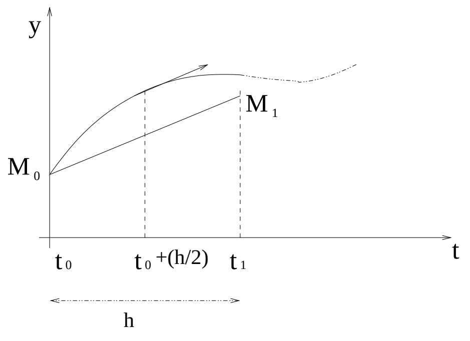
$$y(t) = \exp\Big(\frac{t-1}{t}\Big). \quad < \textbf{2pts} >$$

Nota : Le calcul analytique de la solution de cette équation différentielle nous permet de savoir si on ne s'est pas trompé dans l'estimation de $y(1.1)$, $y(1.2)$, et $y(1.3)$ de la question précédente. Analytiquement, on trouve $y(1.1) \approx 1.09516944$, $y(1.2) \approx 1.181360413$, $y(1.3) \approx 1.259568536$.

5.

Dans la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 de type II que l'on appelle aussi méthode du point milieu (mid-point method), on progresse d'itérations en itération en approximant la courbe par la tangente au point milieu (cf. Figure). <**3 pts**>

Dans la méthode d'Euler modifiée, la tangente considérée est a moyenne des pentes aux deux extrémités de l'intervalle h considéré. <**2 pts**>



IV. Calcul de valeurs et vecteurs propres (20 pts)

Soit A la matrice suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

1. Tracer les disques de Gershgorin et déterminer par cette méthode les intervalles où doivent se trouver les valeurs propres de cette matrice. En supposant qu'il n'existe pas de valeurs propres complexes, donner l'intervalle où doivent se trouver ces valeurs propres. <**5 pts**>
2. Écrivez l'équation caractéristique de A et calculer analytiquement les valeurs propres de A. Donner le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre. <**5 pts**>
3. Calculer la plus grande valeur propre de A par la méthode des puissances avec le vecteur initial suivant : $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$. Réessayer avec le vecteur initial suivant : $x^{[0]} = (1, 1, -1)^t$. Discuter des résultats. <**5 pts**>
4. Rappelez ce que permet de calculer la méthode de la déflation. Appliquez cette méthode sur la matrice A avec le vecteur initial suivant : $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$ (Faites seulement 3 itérations et on admettra pour cette question que la plus grande valeur propre de A est 10 et que son vecteur propre associé est $(1, 0, 1)^t$). <**5 pts**>

Réponse

1. En utilisant les valeurs de chaque ligne de la matrice A, on trouve 3 disques, i.e., $\mathcal{C}_1(centre = 5, r = 5)$, <**1 pt**> $\mathcal{C}_2(centre = 1, r = 0)$ (donc 1 point) <**1 pt**> et finalement $\mathcal{C}_3(centre = 5, r = 5)$ <**1 pt**>. Puisque $C_1 = C_3$ et $A = A^t$ <**1 pt**>, et dans l'hypothèse ou il n'y a pas de valeurs propres complexes (ce qui est une hypothèse vraie puisque la matrice est symétrique!!), les valeurs propres de cette matrice sont donc comprises dans l'intervalle $J = [0; 10]$ <**1 pt**>.

2. Équation caractéristique : det $(A - \lambda I)$=0. On trouve donc les égalités suivantes,

$$\begin{aligned}
(5-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) - 25(1-\lambda) &= 0,\\
(1-\lambda)\big((5-\lambda)^2 - 25\big) &= 0,\\
(1-\lambda)(5-\lambda+5)(5-\lambda-5) &= 0,\\
\lambda(\lambda-1)(\lambda-10) &= 0.
\end{aligned}$$

Donc trois valeurs propres, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 10$ <**3 pts**>. On vérifie que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in J$. Le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre se trouve facilement et on trouve $v_{\lambda_3} = (1, 0, 1)^t$ <**2 pts**>.

3. Les composantes des vecteurs $x^{[p]}$ et la plus grande valeur propre de A, λ_{max}, sont données par la méthode de la puissance, Lorsque le vecteur initial est $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$, les résultats sont résumés dans le tableau ci dessous,

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_{max}
1	1.00	0.1	1.00	10.00
2	1.00	0.01	1.00	10.00
3	1.00	0.001	1.00	10.00

Après moins de trois itérations, on trouve que la procédure semble converger vers $\lambda_3 = \lambda_{max} = 10$ <**1.5 pts**> et le vecteur propre associé à cette valeur propre maximale semble converger vers $v_{\lambda_{max}} = v_{\lambda_3} = (1, 0, 1)^t$ <**1 pt**>.

Lorsque le vecteur initial est $x^{[0]} = (1, 1, -1)^t$, les résultats sont résumés dans le tableau ci dessous,

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_{max}
1	0.00	1.00	0.00	1.00
2	0.00	1.00	0.00	1.00
3	0.00	1.00	0.00	1.00

Après moins de deux itérations, on trouve que la procédure semble converger vers $\lambda_2 = 1$ et le vecteur propre associé à cette valeur propre semble converger vers $v_{\lambda_2} = (0, 1, 0)^t$ <**1.5 pts**>. On se trouve ici dans un cas particulier où la méthode de la puissance nous permet de trouver la deuxième valeur propre de cette matrice lorsque le vecteur initial est $x^{[0]} = (1, 1, -1)^t$ <**1 pt**>.

4. Cette méthode nous permet d'obtenir la deuxième valeur propre <**1 pt**>. On doit considérer la nouvelle matrice,

$$\begin{aligned} B &= A - \lambda_{max}\frac{x_1 x_1^t}{x_1^t x_1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 10.(1/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad < \mathbf{2pts} > \end{aligned}$$

Les composantes des vecteurs $x^{[p]}$ et la valeur propre que l'on cherche, λ_2, sont données par la méthode de la puissance. Lorsque le vecteur initial est $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$, les résultats sont résumés dans le tableau ci dessous,

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_2
1	0.00	1.00	0.00	1.00
2	0.00	1.00	0.00	1.00
3	0.00	1.00	0.00	1.00

La convergence est vite assurée et on trouve $\lambda_2 = 1$ <**1 pt**> et $v_{\lambda_2} = (0, 1, 0)^t$ <**1 pt**>.