DIRO
IFT 2421

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384/2377.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *26/02/2002*

I	Mesure d'incertitude (20 pts).
II	Cancellation de cse (10 pts).
III	Méthode du point fixe et de Newton (35 pts).
IV	Norme de Matrice (5 pts).
V	Système d'équations (20 pts).
VI	Méthode de Newton dans le cas de racines multiples (10 pts).

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Mesure d'incertitude (20 pts)

Soit un triangle quelconque (cf. Fig. 1) pour lequel on a mesuré 2 cotés et l'angle formé par ses 2 cotés comme étant,

$$\begin{aligned} a &= 100 \text{ mètres à } 1 \text{ m près, (i.e., } \Delta a = 1), \\ b &= 101 \text{ mètres à } 1 \text{ m près,} \\ \alpha &= 20 \text{ degrés à } 0.001 \text{ degré près.} \end{aligned}$$

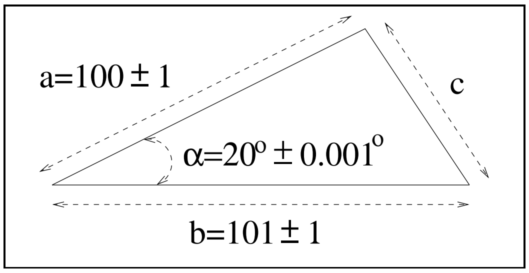

FIG. 1 –

On rappelle la relation liant la longueur des trois cotés d'un triangle quelconque,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

1. Donner l'approximation de c (i.e., c^*). Calculer l'erreur absolue et relative commise sur c et servez vous de ce calcul d'erreur pour souligner les chiffres significatifs "exacts" (cse) de la précédente approximation. Arrondir finalement cette approximation au nombre de cse adéquat. <**14 pts**>
2. En supposant maintenant que les longueurs a et b et l'angle α ne soit entachées d'aucune erreur (i.e., $a = 100$ mètres exactement, $b = 101$ mètres exactement, $\alpha = 20$ degrés exactement et que cos(20) soit donné (par une table de cosinus) par $\cos(20) = 0.9397$ avec 4 cse exacte (après la virgule). Recalculer l'approximation et l'erreur absolue (correctement arrondi au nombre de cse adéquat) sur c. <**6 pts**>

Réponse

1. On a pour valeur approchée,

$$c^* = (100^2 + 101^2 - 2\times 100\times 101\cos 20)^{1/2} \approx 34.917 \text{ mètres.} \quad < \mathbf{2pts} >$$

On obtient la différentielle suivante,

$$\Delta c = \left|\frac{a - b\cos\alpha}{c}\right| \Delta a + \left|\frac{b - a\cos\alpha}{c}\right| \Delta b + \left|\frac{ab\sin\alpha}{c}\right| \Delta\alpha. \quad < \mathbf{6pts} >$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \qquad \Delta c &= \left|\frac{100 - 101\times 0.9397}{34.917}\right| 1 + \left|\frac{101 - 100\times 0.9397}{34.917}\right| 1 + \left|\frac{100\times 101\times 0.3420}{34.917}\right| 0.001, \\ &\approx 0.14580 + 0.20135 + 0.09893, \\ &\approx 0.446089553. \quad < \mathbf{2pts} > \end{aligned}$$

On obtient aussi l'erreur relative,

$$\frac{\Delta c}{c} \approx 1.2775\ 10^{-2}. \quad < \mathbf{1pt} >$$

C'est à dire $\approx 1.28\%$ d'erreur. On trouve donc (seul les 2 premiers chiffres avant la virgule sont significatifs car ($\Delta c < 0.5 \times 10^0$)),

$$c \approx \underline{34}.917 \text{ mètres avec } \Delta c \approx 0.44609 < 0.5 \times 10^0. \quad < \mathbf{2pts} >$$

Si on arrondi cette estimation au nombre de cse, on obtient,

$$c \approx 35 \pm 0.5 \text{ mètres.} \quad < \mathbf{1pt} >$$

2. On doit poser $\cos\alpha = x$ avec $x = 0.9397 \pm 0.5\ 10^{-4}$. <**1 pt**>

On obtient la nouvelle approximation $c^* = 34.915$ <**1 pt**>, la nouvelle différentielle $\Delta c = \left|-\frac{ab}{c}\right| \Delta x$ <**2 pts**> soit numériquement $\Delta c = \left|-\frac{100\times101}{34.915}\right| \times 0.5 \times 10^{-4} \approx 0.0144$ <**1 pt**> et finalement,

$$c \approx 34.9 \pm 0.5 \times 10^{-1} \text{ mètres.} \quad < \mathbf{1pt} >$$

II. Cancellation de cse (10 pts)

Expliquer pourquoi le calcul numérique de l'expression,

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{1}$$

peut conduire à des problèmes d'erreurs numériques quand $b >> 0$, $a \approx 0$, $c \approx 0$. Montrer que l'expression,

$$\frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

est égale à l'équation (1), et expliquer pourquoi cette expression permet d'éviter les problèmes d'erreurs numériques quand $b >> 0$, $a \approx 0$, $c \approx 0$.

Réponse

Quand $b >> 0$, $a \approx 0$, $c \approx 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$ <**2 pts**> et on aura une annulation de cse due à la soustraction de deux nombres quasi égaux <**2 pts**>. Pour éviter ce problème, écrivons,

$$\begin{aligned}
\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \\
&= \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})}, \\
&= \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad < \mathbf{2pts} >
\end{aligned}$$

Maintenant quand $b >> 0$, $a \approx 0$, $c \approx 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac} \approx b$, mais au dénominateur nous avons maintenant l'addition de deux nombres quasi égaux (ce qui ne pose aucun problème numérique au contraire) au lieu de la soustraction de deux nombres quasi égaux qui lui était un réel problème. <**4 pts**>

III. Méthode du point fixe et de Newton (35 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées de la racine r de l'équation,

$$f(x) = \exp(x) - x - 3 = 0. \tag{2}$$

1. **Méthode du point fixe (25 pts).**
   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette équation (2) dans l'intervalle $J_1 = [1, 2]$. En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \exp(x) - 3$, montrer que l'intervalle $J_1 = [1, 2]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique par la méthode du pont fixe n'est pas assurée. <**5 pts**>

   (b) Montrer que la solution de l'équation (2) est aussi solution de l'équation suivante, <**2 pts**>

   $$h(x) = \ln(x + 3) - x = 0. \tag{3}$$

   (c) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette équation (3) dans l'intervalle $J_1 = [1, 2]$. En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_2(x) = x$ avec $g_2(x) = \ln(x + 3)$, montrer que l'intervalle $J_1 = [1, 2]$ est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique par la méthode du pont fixe est cette fois-ci assurée ! <**4 pts**>

   (d) Déterminer analytiquement, grâce au théorème des accroissements finis (ou de la valeur moyenne), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la n-ième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations n_* nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-3} près de cette racine. <**7 pts**>

   (e) Calculer les 5 premières estimées r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, en partant de $r_0 = 1$. <**3 pts**>

   (f) Trouvez une inégalité permettant de trouver le nombre de chiffre après la virgule que l'on peut prendre de r_{n_*} pour en déduire une valeur approchée de r à 10^{-3} près. <**4 pts**>

2. **Méthode de Newton (10 pts).**
   (a) Soit $g_3(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de l'équation (2). Donner $g_3(x)$ (i.e., donner la relation itérative $r_{n+1} = g_3(r_n)$). <**4 pts**>

   (b) Nous allons supposer que les conditions sur g_3 et sa dérivée sont remplies pour la convergence de cette méthode vers une solution unique ; Rappeler ce que cela veut dire pour $g_3(x)$. En déduire une valeur approchée de r après 3 itérations (i.e., donner r_1, r_2, r_3)(avec tjs $r_0 = 1$). En supposant (et cela est vrais) que cette estimation nous donne la racine cherchée à 10^{-4} près, arrondir au nombre adéquat de cse. <**6 pts**>

Réponse

a. L'étude des variations de la fonction $f(x)$ sur $[1, 2]$ montre que la fonction est continue et croissante sur cet intervalle (donc monotone) ($f'(x) = \exp(x) - 1$ et $f'(x) > 0\ \forall x \in [1, 2]$) <**1 pt**>. De plus, on a $f(1) = e - 4 \approx -1.28$ et $f(2) = e^2 - 5 \approx 2.389$ <**1 pt**>. Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle <**1 pt**>. La dérivée première de $g_1(x)$ s'écrit,

$$g_1'(x) = \exp(x).$$

$g_1'(x) \in [e, e^2]$ pour $x \in [1, 2]$. La fonction $g_1(x)$ n'est donc pas contractante sur J_1 (i.e., $|g_1'(x)| \not< 1\ \forall\ x \in J_1$) et donc la convergence n'est pas assurée dans ce cas. <**2 pts**>

b. x solution de $\exp(x) - x - 3 = 0$, est solution de l'équation $\exp(x) = x + 3$, aussi solution de $x = \ln(x + 3)$, et donc solution de $\ln(x + 3) - x = 0$. <**2 pts**>

c. L'étude des variations de la fonction $h(x)$ sur $[1,2]$ montre que la fonction est continue et décroissante (donc monotone) sur cet intervalle ($h'(x) = \frac{1}{x+3} - 1$ et $h'(x) < 0 \ \forall\ x \in [1,2]$) <**1 pt**>. De plus, on a $h(1) = \ln(4) - 1 \approx 0.386$ et $h(2) = \ln(5) - 2 \approx -0.39$ <**1 pt**>. Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle <**1 pt**>. La dérivée première de $g_2(x)$ s'écrit,

$$g_2'(x) = \frac{1}{x+3}.$$

$g_2'(x) \in [0.2, 0.25]$ pour $x \in [1,2]$. La fonction $g_2(x)$ est donc contractante sur J_1 (i.e., $|g_2'(x)| < 1\ \forall\ x \in J_1$) et donc la convergence est cette fois-ci assurée. <**1 pt**>

d. En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g_2(r) = r$ et $r_n = g_2(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la n-ième itération,

$$\begin{aligned}(r_n - r) &= \frac{g_2(r_{n-1}) - g_2(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r), \\ &= g_2'(\zeta) \times (r_{n-1} - r), \qquad \text{avec} \quad \zeta \in J_1.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|g_2'(x)| < \frac{1}{4}$, on obtient les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}|r_n - r| \leq \frac{1}{4}|r_{n-1} - r| &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |r_{n-2} - r|, \\ &\leq \ \dots \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |r_0 - r|, \\ &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad < \mathbf{5pts} >\end{aligned}$$

On obtiendra donc $|r_n - r| < 10^{-3}$ des que,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4}\right)^n &< 10^{-3}, \\ n \ln\left(\frac{1}{4}\right) &< \ln\left(10^{-3}\right).\end{aligned}$$

Soit pour tout $n \geqslant 5$. <**2 pts**>

e. En partant de $r_0 = 1$, on a, $r_n = g(r_{n-1})$ et,

$$\begin{aligned}r_0 &= 1, \\ r_1 &= 1.386294361, \\ r_2 &= 1.478484762, \\ r_3 &= 1.499284766, \\ r_4 &= 1.503918443, \\ r_5 &= 1.504947783. \quad < \mathbf{3pts} >\end{aligned}$$

f. Pour $n = 5$, on a $\left(\frac{1}{4}\right)^5 < 0.00098$. Ce qui permet de choisir comme valeur approchée de r à 10^{-3} près l'une des valeurs approchées décimales r_5' de r_5 à 10^{-5} près <**1 pt**>, puisqu'alors,

$$\begin{aligned}|r_5' - r| = |r_5' - r_5 + r_5 - r| &\leq |r_5' - r_5| + |r_5 - r|, \\ &\leq 10^{-5} + 9.8 \times 10^{-4} < 10^{-3}. \quad < \mathbf{2pts} >\end{aligned}$$

On pourra donc prendre 1.50494 comme valeur approchée à 10^{-3} près <**1 pt**>. (Nota : la solution réelle est 1.505241496 et on peut vérifier que $1.505241496 - 1.50494 = 3.0149 \times 10^{-4} < 10^{-3}$).

2.

a. On a,

$$g_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\exp(x) - x - 3}{\exp(x) - 1}.$$

On a donc la formule itérative suivante,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{\exp(r_n) - r_n - 3}{\exp(r_n) - 1}. \quad < \textbf{4pts} >$$

b. On suppose que $|g_3'(x)| < 1$ pour tout $x \in [r_0, r_1, \ldots, r_n]$ ce qui assure la convergence de l'algorithme comme nous le suppose l'énoncé <**1 pt**> et on obtient,

$$\begin{array}{rcl} r_0 & = & 1.0, \\ r_1 & = & 1.745930121, \\ r_2 & = & 1.537675675, \\ r_3 & = & 1.505904257. \\ < \textbf{3pts} > \ldots & & \end{array}$$

On suppose que $|r_3 - r| < 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-3}$ et donc le résultat s'exprime avec 3 cse après la virgule par $r = 1.505$. <**2 pts**>

IV. Norme de Matrice (5 pts)

En utilisant la définition générale de la norme d'ordre p d'un vecteur colonne ou ligne de $I\!R^n$, montrer que,

$$\| v \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|.$$

Réponse

Soit un vecteur ligne (et sans perte de généralité pour un vecteur colonne) de $I\!R^n$ $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{max}, \ldots, v_n)$ avec v_{max} la composante maximale en valeur absolue de ce vecteur. En utilisant la définition générale de la norme d'ordre p d'un vecteur ($\| v \|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$) <**1 pt**> et en mettant $|v_{max}|$ en facteur de ce vecteur, nous avons,

$$\begin{aligned} \| v \|_\infty &= |v_{max}| \left(|v_1/v_{max}|^\infty + |v_2/v_{max}|^\infty + \ldots + |v_{max}/v_{max}|^\infty + \ldots + |v_n/v_{max}|^\infty \right)^{\frac{1}{\infty}}, \\ &= |v_{max}| \left(0 + 0 + \ldots + 1 + 0 \right)^\infty, \\ &= |v_{max}| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|. \quad < \textbf{4pts} > \end{aligned}$$

V. Système d'équations (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU. <**2 pts**>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1.5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de la matrice A. <**2 pts**>
3. Calculer $\| A \|_\infty$. <**2 pts**>
4. Soit un calcul approximatif de l'inverse de A,

$$(A^{-1})^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.490 & 0 \\ 0.660 & 0.320 & -0.660 \end{pmatrix}.$$

   À partir de ce résultat approximatif, calculer la solution approximative x^* du système linéaire, <**2 pts**>

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer une borne supérieure de l'erreur relative sur x (norme ∞) obtenu précédemment. <**6 pts**>
6. Donner la condition nécessaire pour qu'une technique d'amélioration itérative soit possible. Effectuer une étape d'amélioration itérative (raffinement itératif) pour améliorer la solution approximative trouvée en Question V.4. <**6 pts**>

Réponse

1. $A = \underbrace{A}_{L}\ \underbrace{I}_{U}$ avec I la matrice identité de dimension 3×3. <**2 pts**> [1]

2. $|A| = 1 \times 2 \times -1.5 = -3$. <**2 pts**>

3. $\| A \|_\infty = \max(1, 4, 4.5) = 4.5$. <**2 pts**>

4. $x^* = (A^{-1})^* b = (1.0 \ \ 1.94 \ \ 1.92)^t$. <**2 pts**>

5. $\frac{\|x^* - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|r\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

avec $\mathrm{cond}(A) = |A|\,|A^{-1}| \approx 4.5 \times \max(1, 1.490, 1.64) = 4.5 \times 1.64 = 7.38$, <**1 pt**>
et $\| r \|_\infty = \| b - A^* x^* \|_\infty = \| (0.0 \ \ 0.12 \ \ -0.06)^t) \|_\infty = 0.12$, <**1 pt**>
et $\| b \|_\infty = 6$, donc finalement, <**1 pt**>

$$\begin{aligned} \frac{\| x^* - x \|_\infty}{\| x \|_\infty} &\leq \mathrm{cond}(A) \frac{\| r \|_\infty}{\| b \|_\infty}, \quad < \mathbf{2pts} > \\ &\leq 7.38 \times \frac{0.12}{6}, \\ &\leq 0.1476, \quad (14.6\%). \quad < \mathbf{1pt} > \end{aligned}$$

---

[1] Ou si on aime les calcul, on peut trouver par élimination de Gauss, la décomposition LU suivante,

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}.$$

6. cond(A) ne doit pas être trop grand, ce qui est le cas ici <**1 pt**>. On a $e = A^{-1}r = (0.0 \;\; 0.0588 \;\; 0.078)^t$, et ensuite, $x^{[1]} \approx x^{[0]} + e = (1.0 \;\; 1.94 \;\; 1.92)^t + (0.0 \;\; 0.0588 \;\; 0.078)^t = (1.0 \;\; 1.9988 \;\; 1.998)^t$. <**5 pts**>

Nota : La vrais solution de ce système est $x = (1.0 \;\; 2.0 \;\; 2.0)^t$

VI. Méthode de Newton dans le cas de racines multiples (10 pts)

1. Supposons qu'une fonction $f(x)$ ait une racine p d'ordre m (i.e., $f(x) = (x-p)^m q(x)$, avec $q(p) \neq 0$ et $m > 1$). Montrer que la fonction $\mu(x) = f(x)/f'(x)$ aussi a une racine p mais de multiplicité 1 (i.e., $\mu(x) = (x-p)r(x)$ avec $r(p) \neq 0$). <**6 pts**>
2. Montrez que la méthode de Newton appliquée sur $\mu(x)$ donne la suite itérative suivante, <**3 pts**>

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)^2] - f(x_k)f''(x_k)}. \tag{4}$$

3. Rappeler finalement pourquoi il est plus intéressant d'appliquer la méthode de Newton sur $\mu(x)$ plutôt que sur $f(x)$. <**1 pts**>

Réponse

1.

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1}q(x) + (x-p)^m q'(x)}, \\ &= (x-p)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-p)q'(x)}, \\ &= (x-p)\, r(x). \quad < \textbf{3pts} > \end{aligned}$$

$$\text{Avec,} \qquad r(p) = \frac{q(p)}{mq(p) + (p-p)q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0, \quad < \textbf{3pts} >$$

Et p est une racine d'ordre 1 de $\mu(x)$.

2. En appliquant la méthode de Newton sur $\mu(x)$, on a,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \mu(x_k)/\mu'(x_k), \\ &= x_k - \frac{f(x_k)/f'(x_k)}{\{|f'(x_k)|^2 - f(x_k)f''(x_k)\}/[f'(x_k)]^2}, \\ &= x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}. \quad < \textbf{3pts} > \end{aligned}$$

3. On assure de ce fait la convergence quadratique qui est plus intéressante (en terme de coût calculatoire) qu'une convergence linéaire. <**1 pt**>