DIRO
IFT 2421

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2384/2377.
http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
e-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *29/04/2003*

I	Interpolation polynomiale 3D (20 pts).
II	Interpolation polynomiale : Moindres carrés (25 pts).
III	Dérivation numérique (10 pts).
IV	Integration numérique (25 pts).
V	Résolution d'équation différentielle (25 pts).

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Interpolation polynomiale 3D (20 pts)

Soit une expérience de physique nous donnant pour différentes valeurs discrétisées des paramètres x et y les valeurs suivantes,

$x \mid y$	0.30	0.40	0.50
1.5	1.52	2.04	2.54
2.0	2.38	3.17	3.94

en supposant que ces valeurs résultent de la discrétisation d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, on souhaite interpoler en $f(1.75, 0.425)$.

1. Si on utilise tous ces points, indiquer l'ordre de l'interpolation en x et y que l'on pourra utiliser. En utilisant la connaissance de ces ordres d'interpolation et le pas en x et en y, indiquer aussi une approximation grossière de l'erreur d'interpolation que l'on fera en x et y si on utilise la méthode de Newton Grégory. <**5 pts**>
2. Donner une estimation de $f(x = 1.750, y = 0.425)$ en utilisant la méthode de Newton Grégory. <**12 pts**>
3. Si on avait utilisé la méthode de Newton au lieu de la méthode de Newton Grégory, aurait-on trouvé le même résultat. Justifier votre réponse. Aurait-on trouvé le même résultat si on avait utilisé en x puis en y le polynome obtenu par la méthode de Lagrange. Justifier votre réponse. <**3 pts**>

Réponse

1.

Les trois points données en y nous permettra d'interpoler avec un polynome de collocation d'ordre 2 <**1.5 pt**>. Les deux points données selon x nous permettra seulement d'interpoler linéaiement, i.e., avec un polynome d'ordre 1 <**1.5 pt**>. L'ordre d'erreur sera de $O(h_x^3) \approx 0.001 = 0.1^3$ en y <**1 pt**> et de $O(h_y^2) \approx 0.25$ en x <**1 pt**>.

2.

Pour $x = 1.5$,

	y	z	Δz	$\Delta^2 z$
	0.3	1.52	0.52	-0.02
x=1.5	0.4	2.04	0.5	
	0.5	2.54		

<**2 pts**>

$z = P_2(y) = z_0 + s\,\Delta z_0 + (s(s-1)/2)\,\Delta z_0^2 = 1.52 + 0.52s - 0.02(s(s-1)/2)$.
Pour $s = (y - y_0)/h_y = (0.425 - 0.3)/0.1 = 1.25$,
$z = P_2(y = 0.425) = 1.52 + 0.52(1.25) - 0.02(1.25(0.25)/2) = 2.1668$. <**2 pts**>

Pour $x = 2.0$,

	y	z	Δz	$\Delta^2 z$
	0.3	2.38	0.79	-0.02
x=2.0	0.4	3.17	0.77	
	0.5	3.94		

<**2 pts**>

$z = P_2(y) = z_0 + s\,\Delta z_0 + (s(s-1)/2)\,\Delta z_0^2 = 2.38 + 0.79s - 0.02(s(s-1)/2)$.
Pour $s = (y - y_0)/h_y = (0.425 - 0.3)/0.1 = 1.25$,
$z = P_2(y = 0.425) = 2.38 + 0.79(1.25) - 0.02(1.25(0.25)/2) = 3.3268$. <**2 pts**>

Finalement, interpolation en x,

	x	z	Δz
	1.5	2.1668	1,16
y=0.425	2.0	3.3268	

<**2 pts**>

$z = P_2(x) = z_0 + s\,\Delta z_0 = 2.17 + 1.16s$.
Pour $s = (x - x_0)/h_x = (1.75 - 1.5)/0.5 = 0.5$,
$z = P_2(x = 0.1.75) = 2.75$.
donc ;

$$f(x = 1.750, y = 0.425) \approx 2.75 \qquad < \textbf{2pts} >$$

Remarque : On aurait put interpoler aussi en considérant y constant selon x puis l'inverse. On aurait trouvé $P_1(x = 1.750, y = 0.3) = 1.95$, $P_2(x = 1.750, y = 0.4) = 2.605$, $P_2(x = 1.750, y = 0.5) = 3.240$ et le mêm résultat, i.e., $z = P_3(x = 0.1.75) = 2.75$.

3.
Oui dans les 2 cas car le polynome de collocation est unique et ces deux méthodes approximent la fonction à interpoler par un polynome de collocation. <**3 pts**>

II. Interpolation polynomiale : Moindres carrés (25 pts)

Soit les résultats expérimentaux suivants pour la position d'une étoile à différents temps t,

t	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
$d(t)$	4.47	5.39	6.54	7.82	9.19	10.6	12.0

Et soit le modèle physique suivant pour $d(t)$,

$$d(t) = (u^2 + v^2)t + (1 - u)\exp(v - t), \tag{1}$$

où u et v sont les paramètres inconus de ce modèle que nous voulons estimer ici au sens des moindres carrés (i.e., par la méthode de lissage par moindres carrés).

1. Montrer qu'il est possible de transformer l'équation (1) et de la mettre sous la forme $y(x) = ax + b$ avec le changement de variable suivant, <**5 pts**>

$$\begin{aligned} a &= (1 - u)\exp(v), \\ b &= (u^2 + v^2), \\ x &= \frac{\exp(-t)}{t}, \\ y(x) &= \frac{d(t)}{t}. \end{aligned}$$

2. Trouver les paramètres a et b par la méthode de lissage par moindres carrés en vous aidant du fait, si vous le désirez, que,

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{N=7} t_i = 17.5, & \sum_{i=1}^{N=7} d(t_i) = 56.01, & \sum_{i=1}^{N=7} \frac{\exp(-2t_i)}{t_i^2} = 0.1635, \\ \sum_{i=1}^{N=7} \frac{\exp(-t_i)}{t_i} = 0.6469, & \sum_{i=1}^{N=7} \frac{d(t_i)\exp(-t_i)}{t_i^2} = 2.594, & \sum_{i=1}^{N=7} \frac{d(t_i)}{t_i} = 23.55, \end{array}$$

où les t_i sont les valeurs de temps dans le tableau des résultats expérimentaux et N est le nombre de points ($N = 7$) (ce tableau et plus précisement certaines de ses égalités vous permettra de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question !). <**8 pts**>

3. Comme le but final consiste à déterminer u et v dans le modèle de $d(t)$, il nous reste encore à résoudre le système d'équations non-linéaire,

$$\begin{aligned} a &= (1-u)\exp(v), \\ b &= u^2+v^2. \end{aligned}$$

En supposant des valeurs théoriques approchée pour les paramètres du modèle de $a = 4.0$ et $b = 3.0$, effectuer **une** itération de la méthode de Newton-Raphson à deux variables pour résoudre ce système en utilisant le point de départ $u = 0.5$ et $v = 2.0$ et en utilisant un jacobien avec des dérivés calculées analytiquement. $<$**10 pts**$>$

4. Trouver au sens du modèle au moindre carré $d(t = 1)$. $<$**2 pts**$>$

Réponse

1. En utilisant les relations données à la question 1. et en les remplacant dans l'équation $y = ax + b$, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d(t)}{t} &= (1-u)\,\exp(v)\left(\frac{\exp(-t)}{t}\right) + (u^2+v^2), \\ d(t) &= (u^2+v^2)\,t + (1-u)\,\exp(v-t). \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation (1). $<$**5 pts**$>$

2. Après changement de variable, on obtient une relation linéaire de la forme $y(x) = ax + b$, avec a et b solution du système suivant,

$$\begin{pmatrix} \sum_i^N 1 & \sum_i^N x_i \\ \sum_i^N x_i & \sum_i^N x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^N y_i \\ \sum_i^N x_i y_i \end{pmatrix}. \qquad <\textbf{2 pts}>$$

L'énoncée et le tableau de valeur donné à la question 2. nous permet facilement de trouver les différents termes de cette equation matricielle,

$$\begin{pmatrix} 7 & 0.6469 \\ 0.6469 & 0.1635 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.55 \\ 2.594 \end{pmatrix}. \qquad <\textbf{2 pts}>$$

Une itération du pivot de Gauss sur la matrice augmentée nous permet de trouver,

$$\begin{pmatrix} 7 & 0.6469 \\ 0 & 0.1037 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.55 \\ 0.4176 \end{pmatrix}.$$

Par substitution arrière, on trouve, $a = 4.027$ et $b = 2.992$. $<$**4 pts**$>$

3.

On suppose comme nous le propose l'énoncé, les valeurs approximées suivante $a = 4.0$ et $b = 3.0$. On doit donc résoudre le système suivant par la méthode de Newton Raphson,

$$\begin{aligned} (1-u)\exp(v) - 4.0 &= 0 \quad (= F_1(u,v)), \\ u^2+v^2-3.0 &= 0 \quad (= F_2(u,v)), \end{aligned}$$

ce qui nous donne le jacobien suivant, en utilisant des dérivés calculées analytiquement,

$$F' = \begin{pmatrix} -\exp(v) & (1-u)\exp(v) \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, \qquad <\textbf{3 pts}>$$

et une itération de la méthode de Newton, avec $x = (u,v)^t$ le vecteur solution ($x^{[0]} = (0.5\ ,2.0)^t$)), s'écrit,

$$x^{[1]} = x^{[0]} - \left[F'(x^{[0]})\right]^{-1} F(x^{[0]}). \qquad <\textbf{1 pt}>$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\exp(2) & \frac{\exp(2)}{2} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\exp(2)}{2} - 4 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7.389 & 3.694 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.305 \\ 1.250 \end{pmatrix}, \qquad < \textbf{3 pts} > \\
&= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix} + (1/33.25) \begin{pmatrix} 4 & -3.694 \\ -1 & -7.389 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.305 \\ 1.250 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.175 \\ -0.268 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} 0.325 \\ 1.732 \end{pmatrix}, \qquad < \textbf{3 pts} >
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne $u \approx 0.325$ et $v \approx 1.732$.

4. On obtient $d(t_1) \approx 4.358$ $<$**2 pts**$>$ (et $d(t_2) \approx 5.51$).

III. Dérivation numérique (10 pts)

Soit la formule numérique centrée d'approximation de la dérivée première,

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \tag{2}$$

Donnez la formule numérique d'approximation de la dérivée première, résultant d'une itération de la méthode d'extrapolation de Richardson.

Réponse
1
On à,

$$
\begin{aligned}
f'_{[h]}(x_0) &= \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2), \\
\text{et,} \qquad f'_{[2h]}(x_0) &= \frac{f_2 - f_{-2}}{4h} + O(4h^2), \qquad < \textbf{4 pts} >
\end{aligned}
$$

Et la formule d'extrapolation de Richardson nous permet d'écrire,

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= f'_{[h]}(x_0) + \frac{1}{2^2 - 1}\Big(f'_{[h]}(x_0) - f'_{[2h]}(x_0)\Big) + O(h^4), \qquad < \textbf{1 pt} > \\
&= \frac{4}{3} f'_{[h]}(x_0) - \frac{1}{3} f'_{[2h]}(x_0) + O(h^4), \\
&= \frac{4f_1 - 4f_{-1}}{6h} - \frac{f_2 - f_{-2}}{12h}, \\
&= \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4). \qquad < \textbf{5 pts} >
\end{aligned}
$$

IV. Integration numérique (25 pts)

Soit l'intégrale suivante,

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(\sin(x))\,dx. \tag{3}$$

1. **Méthode des trapèzes.**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles. <**5 pts**>

   (b) Écrire l'expression analytique de l'erreur globale et déterminer une borne **supérieure** de la valeur absolue de cette erreur (Nota : on utilisera une dérivée analytique de la dérivées seconde de $f(x)$ et pour simplifier le problème une évaluation de cette dérivée seulement au points de collocation utilisé pour l'intégration). Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts (cse) dans la valeur estimée de l'intégrale trouvée en (a). <**8 pts**>

   (c) Supposons que l'on ne connaisse pas la nature de la fonction $f(x)$ mais seulement des valeurs discrétisées de cette fonction à des abscisses équidistantes, données par le tableau suivant,

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.373	0.649	0.798	0.8415

   Déterminer maintenant une borne **supérieure** de la valeur absolue de cette erreur en utilisant pour la dérivées seconde de $f(x)$ une approximation de cette dérivée par la (ou les) méthode(s) numérique(s) de votre choix. Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts dans la valeur estimée de l'intégrale trouvée en (a). <**5 pts**>

   (d) De combien serait diminuer l'erreur si le nombre d'intervalle était 10 fois plus nombreux ? <**2 pts**>

   (e) En se limitant à quatre sous-intervalles au maximum et en utilisant l'estimation obtenue à la question (a), déterminer une valeur approchée plus précise à l'aide d'une itération de la méthode de Romberg. Quel est l'ordre de cette erreur ? <**5 pts**>

Réponse

1.a

On obtient, par la méthode des trapèzes, et en utilisant le tableau donné par l'énoncé à la question (c) pour aller plus vite,

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= (\pi/16)\Big(f(0) + 2f(\pi/8) + 2f(\pi/4) + 2f(3\pi/8) + f(\pi/2)\Big), \quad <\textbf{3 pts}> \\
&= (\pi/16)\Big(0 + 0.7468 + 1.29928 + 1.59589 + 0.8415\Big), \\
&\approx 0.880. \qquad <\textbf{2 pts}>
\end{aligned}$$

1.b

L'erreur $E = I - \hat{I}$ sur cette intégrale est,

$$E = \frac{-h^2}{12}(\pi/2)f''(\xi), \qquad \text{avec } \xi \in [0, \pi/2], \text{ et } h = \pi/8. \qquad <\textbf{1 pt}>$$

avec,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x \cos(\sin x), \quad <\textbf{1pt}> \\
f''(x) &= -\sin x \cos(\sin x) - \cos^2 \sin(\sin x). \quad <\textbf{1 pt}>
\end{aligned}$$

L'évaluation de cette dérivée aux différents points de collocations nous donne ; $f''(0) = 0$, $f''(\pi/4) \approx -0.67$, $f''(\pi/4) \approx -0.8623$, $f''(3\pi/8) \approx -0.6737$, $f''(\pi/2) \approx -0.540$. <**1 pt**>

On a donc la borne supérieure suivante,

$$\begin{aligned} |E| &< \frac{(\pi/8)^2}{12} (\pi/2)\, 0.8623, \qquad < \textbf{1 pt} > \\ |E| &< 0.018. \qquad < \textbf{1 pt} > \end{aligned}$$

$|E| < 0.018 < 0.05$ donc un chiffre est significatif après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}$. <**2 pts**>

1.c

L'erreur E sur cette intégrale s'écrit toujours $\frac{-h^2}{12}(\pi/2)f''(\xi)$, avec $\xi \in [0, \pi/2]$ mais cette fois ci, nous allons approximer numériquement $f''(\xi)\ \ \forall \xi \in [0, \pi/2]$ par l'approximation numérique centrée suivante pour les points $x = \pi/8$, $x = \pi/4$, $x = 3\pi/8$,

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \qquad < \textbf{0.5 pt} >$$

et les approximations numériques suivantes pour le premier et dernier point respectivement,

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2}, \qquad < \textbf{0.5 pt} >$$

et son équivalent

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2}. \qquad < \textbf{0.5 pt} >$$

Ce qui nous donne $f''(x = 0) \approx -0.629$, $f''(x = \pi/8) \approx -0.629$, $f''(x = \pi/4) \approx -0.823$, $f''(x = 3\pi/8) \approx -0.6841$, $f''(x = \pi/2) \approx -0.6841$. <**1.5 pts**> On prend la valeur max en valeur absolue, i.e., $f''(x = \pi/4) \approx -0.823$, et la borne supérieure s'écrit,

$$\begin{aligned} |E| &< \frac{(\pi/8)^2}{12} (\pi/2)\, 0.823, \qquad < \textbf{1 pt} > \\ |E| &< 0.016. \end{aligned}$$

$|E| < 0.016 < 0.05$ donc un chiffre est significatif après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}$. <**1 pt**>

1.d

Si il y avait 10 fois plus d'intervalle, h serait 10 fois plus petit et l'erreur serait diminuer d'un facteur égal à $(1/10)^2$ soit de 100. <**2 pts**>

1.e

En utilisant un point sur deux, (i.e., $h = \pi/4$), et en utilisant le tableau de valeur donnée par l'énoncé (pour aller plus vite), on obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\hat{I}_{1,n/2} \;=\; (\pi/8)\Big(f(0) + 2f(\pi/4) + f(\pi/2)\Big) + O(h^2) = (\pi/8)(0 + 1.29928 + 0.8415) \approx 0.84017. \quad < \textbf{2 pts} >$$

On utilise ensuite $\hat{I}_{1,n}$ estimée en (a) et d'ordre $O(h^2)$ avec une itération de la méthode de Romberg, soit,

$$\begin{aligned} \hat{I}_{2,n/2} &= \hat{I}_{1,n} + \frac{1}{2^2 - 1}\Big(\hat{I}_{1,n} - \hat{I}_{1,n/2}\Big), \\ &= 0.880 + (1/3)(0.880 - 0.84017) \approx 0.893. \qquad < \textbf{2 pts} > \end{aligned}$$

L'ordre de cette approximation est de $O(h^4)$. <**1 pts**>

V. Résolution d'équation différentielle (25 pts)

Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{-y(t)}{2t}, \tag{4}$$

avec la condition initiale $y(t = 1) = 1$.

1. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$ et $y(1.4)$ (donner les résultats avec trois décimales). $<$**5 pts**$>$
2. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler mais avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(1.2)$ et $y(1.4)$ donner l'ordre d'erreur de $y(1.4)$. $<$**2 pts**$>$
3. Utilisé la méthode d'extrapolation de Richardson et les deux précédentes questions pour améliorer la précision de $y(1.4)$. $<$**3 pts**$>$
4. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler modifiée et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$ et $y(1.2)$. $<$**5 pts**$>$
5. Quelle serait la stratégie la plus intéressante (en terme de coût calculatoire (en évaluant seulement le nombre d'évaluation de la fonction)) pour une même précision globale d'erreur d'estimation de $y(t)$ sur l'intervalle $t \in [1, 2]$; utiliser un pas $h = 0.1$ avec la méthode d'Euler modifié (d'ordre global 2) ou un pas h^{prime} que l'on determinera avec la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 ? Justifier votre réponse. $<$**5 pts**$>$.
6. En remarquant que cette équation différentielle peut s'écrire aussi $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\frac{dt}{t}$ si $y \neq 0$. Intégrer les deux membres de cette égalité et en déduire, considérant la condition initiale $y(1) = 1$, la solution analytique de cette équation différentielle. $<$**5 pts**$>$

Réponse

1.
Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous,

t_n	y_n
1	1
1.1	0.95
1.2	0.907
1.3	0.869
1.4	0.836

$<$**5 pts**$>$

2.
Avec un pas $h = 0.2$, on trouve imediatement,

t_n	y_n
1	1
1.2	0.9
1.4	0.825

$<$**1.5 pt**$>$

et l'ordre d'erreur de $y(1.4)$ (erreur globale) est en $O(h)$. $<$**0.5 pt**$>$

3.
Avec la formule d'extrapolation de richardson, on trouve

$$
\begin{aligned}
y(t=1.4) &= y_{[h]}(t=1.4) + \frac{1}{2^1-1}\Big(y_{[h]}(t=1.4) - y_{[2h]}(t=1.4)\Big),\\
&= 2y_{[h]}(t=1.4) - y_{[2h]}(t=1.4),\\
&= 2 * 0.836 - 0.825,\\
&= 0.847. \qquad < \mathbf{2.5\ pts} >
\end{aligned}
$$

avec un ordre d'erreur en $O(h^2)$. <**0.5 pts**>

4.

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont portées dans le tableau ci dessous ;

t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
1	-	1
1.1	0.95000	0.91012
1.2	0.91012	0.91278

<**5 pts**>

5.

Pour la méthode d'euler modifiée, on a donc une précision global approximatif de $0.1^2 = 0.01$ pour 10 itérations ($= (2-1)/0.1$) ou chaque itération nécessite 2 évaluations de fonction. Soit pour le total des 10 itérations ; 20 (=10 * 2) évaluations de fonctions. Pour la même précision avec la méthode de RK d'ordre global 4, on peut se permettre d'avoir un $h^{prime} \approx 0.32$ (parce que $0.32^4 \approx 0.1^2$). Seulement 3 ($= (2-1)/0.32$) itérations pour approximer $y(t)$ sur $t \in [1, 2]$ sont nécessaires. Soit pour le total des 3 itérations ; 12 (=3*4) évaluations de fonctions. La méthode de RK d'ordre 4 est donc plus intéressante en terme de précision sur coût calculatoire. <**5 pts**>

6.

En intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}, \quad \text{si } y \neq 0,\\
\text{d'où,} \qquad \ln|y| &= -\frac{1}{2}\ln|t| + C^{st},\\
\ln|y| &= \ln\frac{1}{\sqrt{|t|}} + C^{st},\\
y &= \frac{k}{\sqrt{|t|}}. \qquad < \mathbf{3\ pts} >
\end{aligned}
$$

C^{st} étant une constante. En se servant de la condition initiale $y(1) = 1$, on trouve $C^{st} = 1$, et,

$$
y(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}. \qquad < \mathbf{2\ pts} >
$$