DIRO
IFT 2421

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *27/04/2004*

I	Dérivation Numérique (15 pts).
II	Intégration Numérique (25 pts).
III	Résolution d'équation différentielle (32 pts).
IV	Système d'équations différentielles (15 points).
V	Calcul de valeurs et vecteurs propres (25 pts).

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Dérivation Numérique (15 pts)

Soit les valeurs discrétisées par pas $h = 0.25$ d'une fonction $f(x)$ inconnue donnée dans le tableau suivant,

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183	3.4903	4.4817	5.7546	7.3891

1. Utiliser une formule de différence centrée d'ordre $O(h^2)$ pour approximer numériquement $f'(x = 1)$. **<4 pts>**
2. Utiliser maintenant autant de fois que possible l'extrapolation de Richardson pour améliorer cette dernière estimation. Indiquer l'ordre ainsi qu'une approximation de l'erreur d'estimation commise. **<11 pts>**

Réponse

1.

$$f'(x = 1) = \frac{f(x = 1.25) - f(x = 0.75)}{2 \times 0.25} = \frac{3.4903 - 2.1170}{0.5} = 2.7466 \ \ (+O(h^2)) \ \ \textbf{<4 pts>}$$

2.

$$\text{Pour 2h} \ \blacktriangleright \ f'(x = 1) = \frac{f(1.50) - f(0.50)}{2 \times 0.5} = \frac{4.4817 - 1.6487}{1.0} = 2.8330 \ + O(4h^2) \ \ \textbf{<2 pts>}$$

$$\text{Pour 4h} \ \blacktriangleright \ f'(x = 1) = \frac{f(2.00) - f(0.00)}{2 \times 1.0} = \frac{7.3891 - 1.0000}{2.0} = 3.1946 \ + O(16h^2)) \ \ \textbf{<2 pts>}$$

Ensuite, on utilise l'extrapolation de Richardson, avec les formules,
$f'_{1-\text{R},[h]} = f'_{[h]} + \frac{1}{2^2-1}\{f'_{[h]} - f'_{[2h]}\}$ puis $f'_{1-\text{R},[2h]} = f'_{[2h]} + \frac{1}{2^2-1}\{f'_{[2h]} - f'_{[4h]}\}$, **<1 pt>**
$f'_{2-\text{R}} = f'_{1-\text{R},[h]} + \frac{1}{2^4-1}\{f'_{1-\text{R},[h]} - f'_{1-\text{R},[2h]}\}$ **<1 pt>**

Pas	$f'(x)$	$f'_{1-\text{R}}(x)$	$f'_{2-\text{R}}(x)$
4h=1	3.1946 $+o(16h^2)$		
2h=0.5	2.8330 $+o(4h^2)$	2.7125 $+o(16h^4)$	
h=0.25	2.7466 $+o(h^2)$	2.7178 $+o(h^4)$	2.7182 $+o(h^6)$
		<3 pts>	**<2 pt>**

II. Intégration Numérique (25 pts)

Soit l'intégrale suivante,

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\exp(x)\,dx. \tag{1}$$

NOTA : $\exp(x) = e^x$.

1. **Méthode des trapèzes**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles. **<5 pts>**

(b) Aurait-il été plus intéressant, en terme de précision, d'utiliser l'extrapolation de Richardson combinant deux méthodes des trapèzes, utilisant respectivement 2 puis 1 intervalle ou utiliser la méthode de la question précédente ? Justifiez votre réponse. (Nota : Le raisonnement ne nécessite pas de calculer une estimation numérique de I utilisant l'extrapolation de Richardson. Le raisonnement peut se faire en utilisant seulement l'ordre $O()$ de chaque méthode). <**3 pts**>

(c) Même question mais cette fois-ci en terme de coût calculatoire ? (en évaluant seulement le nombre d'évaluations de la fonction $f(x)$). <**2 pts**>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**

(a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer une valeur numérique approchée de I. <**5 pts**>

(b) Est-ce que cette méthode est plus précise que la méthode en 1a ? Est ce que cette méthode est plus précise que la méthode décrite en 1b (i.e., l'extrapolation de Richardson combinant deux méthodes des trapèzes, utilisant respectivement 2 puis 1 intervalle) ? Justifier votre réponse. <**2 pts**>

3. **Méthode analytique**
Calculer I analytiquement en utilisant une intégration par partie. <**3 pts**>

4. Supposons maintenant que l'on veuille faire une formule numérique qui intègre parfaitement toute famille de fonction $f(x) = g(x)\exp(x)$, i.e., qui permettrait de calculer parfaitement,

$$I = \int_{-1}^{1} \underbrace{g(x)\exp(x)}_{f(x)}\,dx, \tag{2}$$

avec $g(x)$ tout polynôme de degré inférieur ou égale à deux. Supposons que l'on pose que cette formule numérique utilise trois évaluations de fonction à des abscisses régulièrement espacées, i.e., du style,

$$I = af(-1) + bf(0) + cf(1).$$

Indiquez, en quelques lignes quelle serait le stratégie permettant de calculer les coefficients a, b, c (je ne vous demande pas de calculer ses coefficients a,b,c). <**5 pts**>

Réponse

1a.
On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned}
I_{[4]} &= (0.25/2)\Big(f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)\Big), \quad <\mathbf{3\ pts}> \\
I_{[4]} &= (1/8)\Big(0 + 2\times 0.3210063542 + 2\times 0.8243606354 + 2\times 1.587750012 + 2.71828182\Big), \\
I_{[4]} &\approx 1.02306. \quad <\mathbf{2\ pts}>
\end{aligned}$$

1b
Par la méthode des trapèzes (quadratures composites), on a $O(h^2)$ avec $h = 0.25$. Si on avait utilisé la méthode d'extrapolation de Richardson combinant deux méthodes des trapèzes, utilisant respectivement 2 puis 1 intervalle, on aurait eu une méthode dont la précision est en $O(4h^4)$.

$O(4h^4) \approx 0.015625 < O(h^2) = 0.0625$, il est donc plus avantageux de prendre la méthode d'extrapolation de Richardson. <**3 pts**>

1c.

Par la méthode des trapèzes (quadratures composites) utilisant 4 intervalles ► 5 évaluations de fonctions. Pour la méthode d'Extrapolation de Richardson ; 2 puis 1 intervalle, ► $3 + 2 = 5$ évaluations de fonctions. Le coût calculatoire aurait donc été le même [1]. <**2 pts**>

Si on veut être encore plus précis, on peut se rendre compte que l'on peut récuperer les valeurs extrèmes obtenu dans le calcul de la méthode du trapeze avec un interval pour le calcul de la méthode du trapèze utilisant deux intervals et donc la méthode d'Extrapolation de Richardson bien gérée n'utilise que 3 évaluations de fonctions et est donc plus rapide en terme de cout calculatoire que la méthode des trapèzes (quadratures composites) utilisant 4 intervalles. <**BONUS+2 pts**> (si on l'a bien expliqué).

2a.

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, $dx = \frac{1}{2}dt$, <**1 pt**> nous obtenons,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x \exp(x)\, dx, \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (t+1)\exp(\frac{1}{2}(t+1))\, dt, \quad <\textbf{2 pts}> \\
&= \frac{1}{4}\Big(((-\sqrt{3}/3)+1)\exp[\frac{1}{2}((-\sqrt{3}/3)+1)] + ((\sqrt{3}/3)+1)\exp[\frac{1}{2}((\sqrt{3}/3)+1)]\Big), <\textbf{1 pt}> \\
&\approx \frac{1}{4}(0.5221049606 + 3.470926387), \\
&\approx 0.998257837. <\textbf{1 pt}>
\end{aligned}
$$

2b.

La précision de cette méthode est équivalente à la précision de la méthode de Simpson 1/3 ou 3/8, i.e, en $O(h^4)$ donc plus précise que la méthode du trapèze décrite en 1a <**1 pt**> et aussi précise que la méthode décrite en 2a <**1 pt**> [2]

3.

$$
I = \int_0^1 x\exp(x)\, dx = [x\exp(x)]_0^1 - [\exp(x)]_0^1 = 1.0. \quad <\textbf{3 pts}>
$$

4.

Pour trouver ses trois coefficients a, b, et c, on pourrait résoudre le système suivant qui impose que la méthode numérique soit égale à l'intégration analytique des trois polynômes de base de degré inférieur ou égale à deux.

$$
\begin{aligned}
a\exp(-1) + b + c\exp(1) &= \int_{-1}^{1} \exp(x)\, dx, \\
-a\exp(-1) + c\exp(1) &= \int_{-1}^{1} x\exp(x)\, dx, \\
a\exp(-1) + c\exp(1) &= \int_{-1}^{1} x^2\exp(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

<**5 pts**>

[1] Nota : Je ne vous le demandais pas, mais si on n'avait fait l'extrapolation de Richardson, on aurait trouvé $I_{[1]} \approx 1.359141$ et $I_{[2]} \approx 1.091750773$ puis $I_{[Rich.]} \approx 1.002620726$ et la vraie valeur de cette intégrale est 1.0 comme on le verra plus tard.

[2] La vraie valeur de cette intégrale est 1.0, et on obtient $I \approx 0.998257837$ par la méthode de la quadrature Gaussienne à deux termes et $I \approx 1.002620726$ par la méthode d'extrapolation de Richardson, ce qui montre bien que l'erreur est à peu près équivalente.

Nota : C'est le même style de raisonnement qui nous a permis, dans le cours, de montrer que la méthode de la Quadrature Gaussienne à trois termes utilisant des points d'abscisses régulièrement espacés était équivalente à la méthode de Simpson 1/3. [3]

III. Résolution d'équation différentielle (32 pts)

Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = y(t) \sin t, \tag{3}$$

avec la condition initiale $y(t = 0) = 1$.

1. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$ (donner les résultats avec cinq décimales et utiliser le mode radian pour le sinus). <**5 pts**>
2. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler modifié et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$ et $y(0.4)$ (donner aussi les résultats avec trois décimales et utiliser le mode radian pour le sinus). De combien a t-on diminué l'erreur d'approximation pour $y(0.3)$ comparativement à la méthode précédente ? <**7 pts**>
3. Supposons que l'on ait résolu cette équation avec la méthode d'Euler modifié mais avec un pas $h = 0.2$ et que l'on a calculé, avec ce pas, $y_{[2h]}(0.2) = 1.019866933$ et $y_{[2h]}(0.4) = 1.0814221$ (je ne vous demande pas de les recalculer !). Donner l'ordre d'erreur de $y(0.4)$. Donner ensuite la formule d'extrapolation de Richardson utilisant $y(0.4)$ (obtenu à la question précédente et que l'on appellera $y_{[h]}(0.4)$) et $y_{[2h]}(0.4)$ pour donner une meilleure précision de $y(0.4)$ (Soit $y_{\text{extra}}(0.4)$, cette extrapolation). Donner l'ordre d'erreur de $y_{\text{extra}}(0.4)$ ainsi qu'une approximation de l'erreur faîte sur la valeur réelle de $y(0.4)$. <**5 pts**>
4. Quelle serait la méthode numérique d'estimation la plus intéressante, en terme de précision pour l'estimation de $y(t)$; utiliser la méthode d'Euler modifiée avec un pas $h = 0.1$ ou la méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 pour un pas h' que l'on déterminera assurant un même coût calculatoire (en évaluant seulement le nombre d'évaluations de la fonction $f()$) ? Justifier votre réponse. Indiquer ensuite de quel facteur est ce gain en précision. <**5 pts**>
5. Donner le système d'équations que l'on devrait résoudre pour obtenir $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, et $y(0.4)$ par la méthode des différences finies si on utilisait une approximation numérique d'ordre 1 pour approximer $y'(t)$. Donner le nom d'une méthode itérative de résolution d'équation différentielles qui serait aussi précise que cette méthode directe. <**5 pts**>
6. En remarquant que cette équation différentielle peut s'écrire $g(y)dy = k(t)dt$ (équation différentielle à variables séparables), intégrer les deux membres de cette égalité et en déduire, considérant la condition initiale $y(0) = 1$, la solution analytique de cette équation différentielle. <**5 pts**>

Réponse

1.

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous,

t_n	y_n
0.0	1.00000
0.1	1.00000
0.2	1.00999
0.3	1.03005

<**5 pts**>

[3] On pourrait trouver la solution de ce système car les intégrales de ce système sont calculable analytiquement par intégration par partie. $\int_{-1}^{1} \exp(x)\,dx = \exp(1) - \exp(-1)$, $\int_{-1}^{1} x \exp(x)\,dx = 2\exp(-1)$ et $\int_{-1}^{1} x^2 \exp(x)\,dx = \exp(1) - 5\exp(-1)$. En résolvant le système, on trouverait $c = (-3/2)\exp(-2) + (1/2)$, $a = (-7/2) + (1/2)\exp(2)$, $b = 4\exp(-1)$.

2.

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont portées dans le tableau ci dessous,

t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0.0	-	1
0.1	1.000	1.005
0.2	1.015	1.020
0.3	1.040	1.046
0.4	1.076	1.082

<**4 pts**>

On a diminué l'erreur d'un facteur $O(0.1^1)/O(0.1^2) = 10$. <**1 pt**>

3.

L'ordre d'erreur de $y(0.4)$ (erreur globale) est en $O(h^2)$ (plus précisément en $O(4h^2)$) <**1 pt**>. Avec la formule d'extrapolation de Richardson, on trouve,

$$\begin{aligned}
y_{\text{extra}}(t=0.4) &= y_{[h]}(t=0.4) + \frac{1}{2^2-1}\Big(y_{[h]}(t=0.4) - y_{[2h]}(t=0.4)\Big), \quad <\textbf{2 pts}> \\
&= \frac{4}{3}y_{[h]}(t=0.4) - \frac{1}{3}y_{[2h]}(t=0.4), \\
&= \frac{4}{3}1.08200644 - \frac{1}{3}1.0814221, \\
&= 1.08220122. \quad <\textbf{1 pt}>
\end{aligned}$$

avec un ordre d'erreur global en $O(h^4)$, ce qui nous donne une approximation de l'erreur faîte sur la valeur réelle de $y(1.4)$, de $\Delta y(1.4) \approx 10^{-4}$. <**1 pt**>

4.

La méthode de Runge Kutta d'ordre global 4 (RK4) exige quatre évaluations de fonction pour chaque itération (contre deux évaluations de fonction pour chaque itération pour la méthode d'Euler modifiée (EM)) <**1 pt**> . On doit donc fixer un pas deux fois plus important (i.e., $h = 0.2$) pour la méthode de RK4 pour assurer approximativement un même coût calculatoire. En terme de précision 0.2^4 (pour RK4) $< 0.1^2$ (pour EM) <**2 pt**>**s** et la méthode de RK4 restera plus précise d'un facteur $0.1^2/0.2^4 = 6.25$ (pour un même cout calculatoire). <**2 pts**>

5.

En utilisant une formule numérique d'ordre 1 pour approximer $y'(t)$, cad,

$$y'(t_j) = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} + O(h),$$

une discrétisation du temps du style $t_n = t_0 + nh$ avec $h = 0.1$ (et une condition initiale $y(t_0) = 1$ donnée), on obtient le système de quatre équations à quatre inconnus suivant,

$$\begin{aligned}
y(t_1) - y(t_0) &= h\, y(t_0) \sin t_0, \\
y(t_2) - y(t_1) &= h\, y(t_1) \sin t_1, \\
y(t_3) - y(t_2) &= h\, y(t_2) \sin t_2, \\
y(t_4) - y(t_3) &= h\, y(t_3) \sin t_3.
\end{aligned}$$

<**4 pts**> Cette méthode directe aurait une erreur (directe) sur l'estimation de $y(t_1) = y(0.1), \ldots, y(t_4) = y(0.4)$ en $O(h)$ soit la même précision que la méthode d'Euler. <**1 pt**>

6.

On peut séparer les variables de l'équation différentielle et la mettre sous la forme,

$$\frac{dy}{y} = \sin t dt. \quad <\textbf{1 pt}>$$

En intégrant ensuite les deux membres de cette égalité, on trouve,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \sin t \, dt, \\
\ln |y| &= -\cos t + C^{st}, \\
y &= \exp(-\cos t + C^{st}). \quad < \mathbf{3pts} >
\end{aligned}$$

C^{st} étant une constante. En se servant de la condition initiale $y(0) = 1$, on trouve[4] $C^{st} = 1$, et,

$$y(t) \quad = \quad \exp(-\cos t + 1). \quad < \mathbf{1pt} >$$

IV. Système d'équations différentielles (15 points)

Soit les deux équations différentielles liées suivantes,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(x''(t) + y''(t)) + x'(t) + y'(t) + x(t) = 0, \\
&\frac{1}{2}(x''(t) - y''(t)) + x'(t) - ty'(t) + y(t) = 0,
\end{aligned}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).

Réponse

On doit avant tout mettre ses deux équations liées sous la forme,

$$\begin{aligned}
x''(t) &= f_1(x'(t), y'(t), x(t), y(t)), \\
y''(t) &= f_2(x'(t), y'(t), x(t), y(t)).
\end{aligned}$$

Pour cela, additionons et soustrayons ces deux relations et isolons $x''(t)$ et $y''(t)$,

$$\begin{aligned}
x''(t) &= -2x'(t) + (t-1)y'(t) - x(t) - y(t), \\
y''(t) &= -(1+t)y'(t) - x(t) + y(t).
\end{aligned}$$

$< \mathbf{4\,pts} >$

On peut ensuite En faisant le changement de variable approprié, i.e., en posant $z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = y(t)$, $z_3(t) = x'(t)$ et $z_4(t) = y'(t)$, on trouve le système d'équations différentielles du premier ordre suivant,

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_3(t), \\
z_2'(t) &= z_4(t), \\
z_3'(t) &= -2z_3(t) + (t-1)z_4(t) - z_1(t) - z_2(t), \\
z_4'(t) &= -(1+t)z_4(t) - z_1(t) + z_4(t).
\end{aligned}$$

$< \mathbf{7\,pts} >$

avec les conditions initiales suivantes, $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 1$, $z_3(0) = 1$, $z_4(0) = 0$.<**4 pts**> On rappelle qu'avec ce changement de variable, on cherche maintenant $z_1(t) = x(t)$ et $z_2(t) = y(t)$.

[4]Nota : les valeurs discrétisées exactes de la fonction $y(t)$ sont $y(0.0) = 1$, $y(0.1) = 1.005008335$, $y(0.2) = 1.020133419$, $y(0.3) = 1.045675942$, $y(0.4) = 1.082138316$, ...

V. Calcul de valeurs et vecteurs propres (25 pts)

Soit A la matrice suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Indiquer une borne supérieure (en valeur absolue si elles sont réelles ou en modules si elles sont complexes) pour la plus grande valeur propre de cette matrice. $<$**3 pts**$>$
2. En supposant qu'il n'existe pas de valeurs propres complexes, donner par la méthode de Gershgorin un intervalle où doivent se trouver ces valeurs. $<$**5 pts**$>$
3. Écrivez l'équation caractéristique de A et calculer analytiquement les valeurs propres de A. $<$**5 pts**$>$
4. Calculer la plus grande valeur propre de A par la méthode des puissances avec le vecteur initial suivant : $x^{[0]} = (1,1,1)^t$ (Faites au moins 6 itérations). $<$**5 pts**$>$
5. idem que précedemment avec le vecteur initial $x^{[0]} = (0,1,0)^t$ (Faites au moins 2 itérations). $<$**2 pts**$>$
6. Donner deux raisons qui explique pourquoi la convergence était lente lorsque la méthode de la puissance était initialisée par le vecteur $x^{[0]} = (1,1,1)^t$ comparativement au modèle itératif initialisé par $x^{[0]} = (0,1,0)^t$. Justifiez bien votre réponse. $<$**5 pts**$>$

Réponse

1.

Une borne supérieure pour la plus grande valeur propre de cette matrice de dimenion $n = 3$ est, si i désigne les lignes et j, les colonnes de la matrice A,

$$\begin{aligned}
|\lambda| &\leq \min\Big\{ \max_{i=1 \text{ à } n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ , \ \max_{j=1 \text{ à } n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \Big\}, \\
|\lambda| &\leq \min\big\{ \max(2,6,2) \ , \ \max(4,2,4) \big\}, \\
|\lambda| &\leq 4.
\end{aligned}$$

$<$ **3 pts** $>$

2.

En utilisant les valeurs de chaque ligne de la matrice A, on trouve 3 disques, i.e., $\mathcal{C}_1(\text{centre} = 1, r = 1)$, $\mathcal{C}_2(\text{centre} = 2, r = 4)$ et $\mathcal{C}_3(\text{centre} = 0, r = 2)$. Soit S l'union de ces trois disques. $S = \mathcal{C}_2(\text{centre} = 2, r = 4)$.
$<$**2 pts**$>$

Puisque la matrice n'est pas symétrique, on peut raffiner ce domaine en trouvant S^t, l'union des trois disques obtenu sur la matrice transposé. $S^t = \mathcal{C}_1(\text{c} = 1, r = 3)\, U\, \mathcal{C}_2(\text{c} = 2, r = 0)\, U\, \mathcal{C}_3(\text{c} = 0, r = 4)$.
$<$**2 pts**$>$

Dans l'hypothèse ou il n'y a pas de valeurs propres complexes (pour l'instant rien ne nous permet de le dire puisque la matrice n'est pas symétrique), les valeurs propres de cette matrice sont donc comprises sur l'axe reel de l'intersection de S et S^t, cad, dans l'intervalle $J = [-2; 4]$. $<$**1 pts**$>$

3.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ \lambda(1-\lambda)+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve ensuite l'équation caractéristique,

$$\begin{aligned}
(\lambda(1-\lambda)+2)(2-\lambda) &= 0, \\
(\lambda-2)(\lambda+1)(2-\lambda) &= 0.
\end{aligned}$$

Donc trois valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -1$. <**5 pts**> (On vérifie que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in J$).

4. Les composantes des vecteurs $x^{[p]}$ et la plus grande valeur propre de A, λ_{max}, sont données par la méthode de la puissance, Lorsque le vecteur initial est $x^{[0]} = (1, 1, 1)^t$, les résultats sont résumés dans le tableau ci dessous,

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_{max}
1	1/3	1	1/3	6/1
2	1/5	1	1/5	10/3
3	1/7	1	1/7	14/5
4	1/9	1	1/9	18/7
5	1/11	1	1/11	22/9

<**4 pts**>

On peut voir que cela converge très lentement vers $\lambda_1 = \lambda_{max} = 2$ et le vecteur propre associé à cette valeur propre maximale semble converger vers $v_{\lambda_{max}} = v_{\lambda_3} = (0, 1, 0)^t$. <**1 pt**>
[1]

5.
les résultats sont résumés dans le tableau ci dessous,

p	Composantes de $y^{[p]}$			λ_{max}
1	0	1	0	2
2	0	1	0	2

Les resultats convergent en une seule itération vers $\lambda_{max} = 2$ et $v_{\lambda_{max}} = (0, 1, 0)^t$.
<**2 pts**>

6.
2 Raisons :

1. Dans le deuxième cas on à pris comme vecteur initial le vecteur propre que l'on cherchait. On était donc déjà à convergence ! <**2.5 pts**>
2. Dans le cas ou on prend un vecteur initial différent du vecteur propre que l'on désire estimer (1er cas), la convergence lente nous indique que la valeur propre maximal de cette matrice n'est pas très dominante. Précedement, on a vu que la deuxième valeur propre était était aussi grande qu'elle ; ce qui explique cela. <**2.5 pts**>

[1]Nota : En fait ce schéma itératif peut facilement nous faire déduire que le vecteur propre à la n-ième itération est $v_{\lambda_{max}} = v_{\lambda_3} = (1/(2n+1), 1, 1/(2n+1))^t$ et la valeur propre $\lambda_1 = \lambda_{max} = (2+4n)/(-1+2n)$ qui converge bien lorsque $n \to \infty$ vers $\lambda_1 = \lambda_{max} = 2$ et $v_{\lambda_{max}} = v_{\lambda_3} = (0, 1, 0)^t$.