DIRO
IFT 2421

# EXAMEN FINAL

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2421/
*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**date :** *27/04/2005*

| | |
|---|---|
| I ...................... | Moindres Carrés (12 pts). |
| II ..................... | Dérivation Numérique (22 pts). |
| III .................... | Intégration Numérique (40 pts). |
| IV .................... | Résolution d'Équation Différentielle (27 pts). |
| V ..................... | Système d'Équations Différentielles (15 pts). |

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

**I. Moindres Carrés (12 pts)**

Soit une fonction $y = f(x)$ définie par les mesures suivantes,

| $x_i$ | 0.0 | $\pi/6$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $5\pi/6$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = f(x_i)$ | 0.0 | 1.25 | 3.0 | 4.0 | 3.0 | 1.25 | 0 |

Si on utilisait la méthode des moindres carrés pour trouver une approximation de la fonction $f(x)$ de la forme,

$$y^\star = f^\star(x) = a\sin x + b\sin 3x.$$

1. Donner l'expression $R(a,b)$ appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients $a$ et $b$ et des $x_i$, $y_i$) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés. **<3 pts>**
2. Trouver les coefficients $a$ et $b$ au sens des moindres carrés. On donnera le tableau suivant,

| | |
|---|---|
| $\sum_{i=1}^{N=7}(\sin 3x_i)^2 = 3.0$ , | $\sum_{i=1}^{N=7}(\sin x_i)(\sin 3x_i) = 0.0$ , |
| $\sum_{i=1}^{N=7} y_i \sin(x_i) = 5.25 + 3\sqrt{3}$ , | $\sum_{i=1}^{N=7} y_i \sin(3x_i) = -1.5$ , |

où $N$ est le nombre de points ($N = 7$) (ce tableau et plus précisément certaines/toutes de ses égalités vous permettrons de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question). **<9 pts>**

**Réponse**

**1.**

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est,

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{7}\big[y_i - a\sin x_i - b\sin 3x_i\big]^2. \qquad < \mathbf{3pts} >$$

**2.**

Trouver les coefficients $a$ et $b$ au sens des moindres carrés, c'est trouver $a$ et $b$ pour que $R(a,b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$. Par un calcul direct, nous trouvons le système d'équations,

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{7}(\sin x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{7}(\sin x_i)(\sin 3x_i) &= \sum_{i=1}^{7} y_i \sin x_i \\ a\sum_{i=1}^{7}(\sin x_i)(\sin 3x_i) + b\sum_{i=1}^{7}(\sin 3x_i)^2 &= \sum_{i=1}^{7} y_i \sin 3x_i \end{aligned}$$

**<5 pts>**

Pour trouver $a$ et $b$, on a donc besoin en plus des informations fournies dans le tableau, de $\sum_{i=1}^{7}(\sin x_i)^2 = (\sin 0)^2 + (\sin\pi/6)^2 + (\sin\pi/3)^2 + (\sin 2\pi/3)^2 + (\sin 5\pi/6)^2 + (\sin\pi)^2 = (0.0)^2 + (0.5)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 + (1)^2 + (0.5)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 + (0.5)^2 + (0.0)^2 = 0.0 + 0.25 + 0.75 + 1 + 0.75 + 0.25 + 0.0 = 3.0.$ **<2 pts>**

Ce qui nous donne le système,

$$\begin{aligned} 3a &= 5.25 + 3\sqrt{3}, \\ 3b &= -1.5, \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour les coefficients ; $a \approx 3.482$ et $b = -0.5$. **<2 pts>**

Nota : la fonction d'approximation s'écrit donc : $y^\star = f^\star(x) = 3.482 \sin x - 0.5 \sin 3x$.

---

### II. Dérivation Numérique (22 pts)

1. Soit la formule de différence suivante,

$$D(x_0) = \frac{(1-\theta)}{h}\Big(f(x_0+h) - f(x_0)\Big) + \frac{\theta}{h}\Big(f(x_0) - f(x_0-h)\Big), \tag{1}$$

dans laquelle $\theta$ est un paramètre compris entre $[0, 1]$. Trouver qualitativement ce qu'approxime cette formule de différence au point $x_0$ pour $h$ petit. **<2 pts>**

2. En vous aidant du développement limité de Taylor de degré approprié, montrer que cette formule approxime numériquement une dérivée première au point $x_0$ et que les deux premiers termes de l'erreur associée à cette formule d'approximation sont donnés par : **<4 pts>**

$$\frac{(2\theta-1)h}{2} f''(x) - \frac{h^2}{6} f'''(x).$$

3. En déduire l'ordre de précision de cette formule pour les différentes valeurs de $\theta$ et en déduire aussi la valeur de $\theta$ pour laquelle cette précision est la plus grande. **<3 pts>**
4. Pour la valeur de $\theta$ optimal (i.e., pour laquelle cette précision est la plus grande), en déduire donc la formule de différence $D(x_0)$ résultante. Comment s'appelle cette formule ? **<3 pts>**
5. Soit maintenant la formule de différence centrée d'ordre 2 suivante,

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\Big(f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big) + O(h^2). \tag{2}$$

En utilisant la formule précédente, montrer que, **<4 pts>**

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{4h^2}\Big(f(x_0+2h) - 2f(x_0) + f(x_0-2h)\Big). \tag{3}$$

6. En déduire l'ordre de cette dernière approximation. **<2 pts>**
7. Supposons que l'on ne dispose pas de $f(x_0+2h)$ ni de $f(x_0-2h)$, mais de $f(x_0+3h)$ et de $f(x_0-3h)$. Comment devrait on utiliser ces deux dernières données et $f(x_0)$ pour approximer, tout comme l'Équation (3), $f''(x_0)$ avec le même ordre ? (i.e., donner la formule de différence appropriée utilisant $f(x_0+3h)$, $f(x_0-3h)$ et $f(x_0)$.) **<4 pts>**

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

Cette formule de différence est obtenue à partir de la combinaison linéaire des formules de différences avant et arrière (ou ascendante et descendante) d'ordre 1 permettant d'approximer la dérivée d'ordre 1 en $x_0$ (ou homogène à la définition mathématique de ce qu'est une dérivée première en $x_0$, i.e., $f'(x_o^+) = \lim_{h\to 0} 1/h(f(x_0+h) - f(x_0)$ pour la dérivé à droite de $x_0$ et $f'(x_o^-) = \lim_{h\to 0} 1/h(f(x_0) - f(x_0-h))$ pour la dérivé à gauche de $x_0$). Donc cette formule est homogène à l'approximation de $f'(x_0)$. **<2 pts>**

$\boxed{\textbf{2.}}$

Si on utilise le développement limité de Taylor d'ordre 3 en $x_0$ de $f(x_0+h)$, on obtient,

$$\frac{(1-\theta)}{h}\Big(f(x_0+h)-f(x_0)\Big)=(1-\theta)\Big(f'(x_0)+\frac{h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(x_0)+O(h^3)\Big),$$

et si on utilise le développement limité de Taylor d'ordre 3 en $x_0$ de $f(x_0-h)$, on obtient,

$$\frac{\theta}{h}\Big(f(x_0)-f(x_0-h)\Big)=\theta\Big(f'(x_0)-\frac{h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(x_0)+O(h^3)\Big).$$

La somme de ces deux dernières formules nous permet de trouver,

$$D(x_0)=f'(x_0)+\frac{(1-2\theta)h}{2}f''(x_0)+\frac{h^2}{6}f'''(x_0)+O(h^3),$$

i.e.,

$$f'(x_0)=D(x_0)+\frac{(2\theta-1)h}{2}f''(x_0)-\frac{h^2}{6}f'''(x_0)+O(h^3). \qquad <\textbf{4 pts}>$$

$\boxed{\textbf{3.}}$

Donc, pour $\theta=1/2$, l'ordre de l'approximation est $O(h^2)$. Pour $\theta\neq 1/2$ mais $\theta\in[1\ 2]$, l'ordre de cette approximation est $O(h)$. **<3 pts>**

$\boxed{\textbf{4.}}$

L'Équation (4) résultante, pour $\theta=1/2$ s'écrit donc,

$$\begin{aligned}
D_{[\theta=1/2]}(x_0) &= \frac{1}{2h}\Big(f(x_0+h)-f(x_0)\Big)+\frac{1}{2h}\Big(f(x_0)-f(x_0-h)\Big),\\
&= \frac{1}{2h}\Big(f(x_0+h)-f(x_0-h)\Big). \quad <\textbf{2 pts}>
\end{aligned}$$

C'est la formule de différence centrée d'ordre 2. **<1 pt>**.

$\boxed{\textbf{5.}}$

On a donc, $f''(x_0)\approx\frac{1}{2h}\Big(f'(x_0+h)-f'(x_0-h)\Big)$ , et en utilisant le fait que $f'(x)\approx\frac{1}{2h}\Big(f(x_0+h)-f(x_0-h)\Big)+O(h^2)$, on trouve facilement,

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &\approx \frac{1}{2h}\Big(\frac{1}{2h}\Big[f(x_0+2h)-f(x_0)\Big]+O(h^2)-\frac{1}{2h}\Big[f(x_0)-f(x_0-2h)\Big]+O(h^2)\Big),\\
f''(x_0) &\approx \frac{1}{4h^2}\Big(f(x_0+2h)-2f(x_0)+f(x_0-2h)\Big) \quad (+O(h)).
\end{aligned}$$

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{6.}}$

L'ordre de cette approximation est 1 (ou $O(h)$). **<2 pts>**

$\boxed{\textbf{7.}}$

En utilisant les développements limités, $f(x_0+3h)=f(x_0)+3hf'(x_0)+(9h^2/2)f''(x_0)+O(h^3)$, et $f(x_0-3h)=f(x_0)-3hf'(x_0)+(9h^2/2)f''(x_0)+O(h^3)$.

On peut obtenir la formule suivante,

$$f''(x_0)\approx\frac{1}{9h^2}\Big(f(x_0+3h)-2f(x_0)+3f(x_0-3h)\Big)+O(h). \qquad <\textbf{4pts}>$$

### III. Intégration Numérique (40 pts)

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} . \tag{4}$$

Il est clair qu'on ne peut utiliser directement les formules numériques vues en cours et qu'avant tout un changement de variable s'impose pour transformer $I$ à une forme convenable à l'application des formules.

1. Montrer que par le changement de variable approprié, $x = 1/z^2$, l'intégrale $I$ peut se mettre sous la forme, <**4 pts**>

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} \quad \Big( = \int_0^1 f(x)\, dx \Big). \tag{5}$$

2. **Méthode des Trapèzes et de Romberg**
   (a) Si on utilise la méthode des trapèzes composites pour approcher la valeur de $I$, quel nombre d'intervalles doit on prendre pour avoir un résultat d'approximation de l'intégrale avec 2 chiffres significatifs exactes (cse) ? (Nota : je vous aide en vous donnant l'information suivante : $\max_{\xi \in [0\ 1]} |f''(\xi)| = |f''(0)|$). <**6 pts**>
   (b) Prendre un pas d'intégration de $h = 0.25$ et donner l'approximation du calcul de $I$ en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites). <**5 pts**>
   (c) Théoriquement de combien devrait on diminuer le pas d'intégration pour faire une erreur quatre fois moins grande ? Justifier votre réponse.
   (d) Déterminer une valeur approchée plus précise à l'aide d'une itération de la méthode de Romberg. Quel est l'ordre de cette erreur ? <**5 pts**>
3. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**
   (a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer une valeur numérique approchée de $I$. <**5 pts**>
   (b) Serait il plus intéressant, en terme de précision, d'utiliser la méthode des quadratures Gaussiennes avec deux termes mais composites (i.e., en faisant l'addition de deux méthodes de quadrature Gaussienne avec deux termes ; la première pour approcher l'intégrale de $I$ entre les bornes 0 et 0.5 additionné à la seconde permettant d' approcher l'intégrale de $I$ entre les bornes 0.5 et 1.0) ou utiliser la méthode de Simpson 1/3 ? Justifier votre réponse. Nota : Le raisonnement peut se faire en utilisant seulement l'ordre $O()$ de chaque méthode). <**3 pts**>
4. **Méthode de Simpson 1/3**
   (a) Calculer une valeur approchée de $I$ par la méthode de Simpson 1/3. <**4 pts**>
5. **Méthode du Trapèze et d'Euler**
   (a) Soit $I_{trap}(f)$ une estimée de l'intégrale de la fonction $f(x)$ sur $[x_0, x_n]$ par la méthode composite des trapèzes et $I(f)$ la vraie intégrale. En notes de cours, on à vu que,

$$E(f) = I(f) - I_{trap}(f) = -\frac{h^2}{12}(x_n - x_0) f''(\xi), \quad \text{avec} \quad x_0 \geq \xi \geq x_n.$$

   Montrer que dans le cas où $I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)}$, on à l'approximation suivante, <**3 pts**>

$$I(f) \approx I_{trap}(f) - \frac{h^2}{12}(f'(1) - f'(0)).$$

(b) En utilisant la question précédente, raffiner (i.e., améliorer) l'approximation donnée par $I_{trap}(f)$ et indiquer ensuite quel est le terme d'erreur associé à cette approximation. <**5 pts**>

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

En posant donc $x = 1/z^2$, on a $dx = (-2/z^3)\,dz$ et,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} = \int_1^0 \frac{-2dz}{2z^3\,\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2},$$

que l'on peut écrire sous la forme (puisque la variable $z$ est muette),

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}. \qquad < \textbf{4 pts} >$$

$\boxed{\textbf{2a.}}$

La formule d'erreur dans le cas des trapèzes composites s'écrit (avec $a = 0$ et $b = 1$, les bornes de l'intégrale),

$$|E| = \frac{h^2}{12}(b-a)|f''(\xi)| = \frac{h^2}{12}|f''(\xi)|, \qquad \xi \in [0\ 1].$$

Cette erreur bornée par $0.5 \times 10^{-2}$ (i.e., pour avoir une estimation avec deux cse) nous permet d'écrire $(h = 1/n)$,

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} \quad \max_{\xi\in[0\ 1]} |f''(\xi)| &< 0.5 \times 10^{-2}\,, \\ \frac{1}{n^2} &< \frac{12 \times 0.5 \times 10^{-2}}{|f''(0)|}\,, \\ n &> \sqrt{\frac{|f''(0)|}{6 \times 10^{-2}}}\,. \end{aligned}$$

Reste à calculer $|f''(0)|$, $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{-2+8x-2x^2}{(1+x^2)^3}$. Donc $|f''(0)| = 2.$ et on trouve $n > 5.77$, soit $n = 6$. <**6 pts**>

$\boxed{\textbf{2b.}}$

On a le tableau de valeur suivant,

| $x$ | 0.0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.0 | 0.9411765 | 0.8 | 0.64 | 0.5 |

L'utilisation de la formule des trapèzes nous donne,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} \approx \frac{0.25}{2}\big[1 + 2\times 0.9411765 + 2\times 0.8 + 2\times 0.64 + 0.5\big] \approx 0.7827941.$$

<**5 pts**>

$\boxed{\textbf{2c.}}$

Par la méthode des trapèzes (quadratures composites), on a un terme d'erreur en $O(h^2)$ (avec $h = 0.25$). Pour diminuer l'erreur par 4, il faut donc diminuer le pas par un facteur 2 (l'erreur étant proportionnelle à $h$) ou donc doubler le nombre d'intervalles. **<2 pts>**

$\boxed{\textbf{2d.}}$

En utilisant un point sur deux, (i.e., $2h = 0.5$), et en utilisant le tableau de valeur donnée plus haut, on obtient, par la méthode des trapèzes,

$$I_{1,[2\ interv]} = \frac{0.5}{2}\Big(f(0) + 2f(0.5) + f(1)\Big) + O(4h^2) = \frac{0.5}{2}(1.0 + 2 \times 0.8 + 0.5) \approx 0.775. \quad < \textbf{2 pts} >$$

On utilise ensuite $I = I_{1,[4\ interv]}$ estimée précédemment et d'ordre $O(h^2)$ avec une itération de la méthode de Romberg, soit,

$$\begin{aligned} I_{2,richardson} &= I_{1,[4\ interv]} + \frac{1}{2^2-1}\Big(I_{1,[4\ interv]} - I_{1,[2\ interv]}\Big), \\ &= 0.7827941 + \frac{1}{3}(0.7827941 - 0.775) \approx 0.7853921333. \qquad < \textbf{2 pts} > \end{aligned}$$

L'ordre de cette approximation est de $O(h^4)$. **<1 pt>**

$\boxed{\textbf{3a.}}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, pour lequel $dx = \frac{1}{2}dt$, **<1 pt>** nous obtenons,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)}\, dx\,, \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+\frac{1}{4}(t+1)^2}\,, \qquad <\textbf{2 pts}> \\ &\approx \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{3}+1)^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{4}(\frac{-\sqrt{3}}{3}+1)^2}\Big)\,, \qquad <\textbf{1 pt}> \\ &\approx \frac{1}{2}(0.6165195927 + 0.9572508989)\,, \\ &\approx 0.786923413\,. \qquad <\textbf{1 pt}> \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3b.}}$

Le terme d'erreur de la méthode de quadrature Gaussienne à deux termes composite est le même que celui de la méthode de Simpson 1/3 composite donc les deux méthodes seraient équivalente en terme de précision. **<3 pts>**

$\boxed{\textbf{4.}}$ Pour cette question, du fait que l'énoncé ne nous le précisait pas, on pouvait **1)** soit appliquer la méthode de Simpson 1/3 composite en gardant $h = 0.25$. Dans ce cas, l'application directe de la formule nous donnait,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} \approx \frac{0.25}{3}\big[1 + (4 \times 0.9411765) + (2 \times 0.8) + (4 \times 0.64) + 0.5\big] \approx 0.7853921668.$$

ou soit **2)** Appliquer la méthode de Simpson 1/3 simple et dans ce cas le pas était de $h = 0.5$, et l'application directe de la formule nous donnait,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} \approx \frac{0.5}{3}\big[1 + (4 \times 0.8) + 0.5\big] \approx 0.7833. \qquad < \textbf{4 pts} >$$

$\boxed{\textbf{5a.}}$

Les bornes d'intégration sont $x_0 = 0$, $x_n = 1$ et en utilisant le théorème des valeurs moyennes, lorsque $0 \leq \xi \leq 1$, $f''(\xi) = \frac{f'(1)-f'(0)}{1-0} = f'(1) - f'(0)$, on obtient l'approximation demandée. $<$**3 pts**$>$

$\boxed{\textbf{5b.}}$

Nous avons, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et donc $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, et donc $f'(0) = 0$ et $f'(1) = -0.5$. De ce fait, $I(F) \approx I_{trap}(f) - \frac{h^2}{12}(f'(1) - f'(0)) = 0.7827941 - \frac{0.25^2}{12}(0 + 0.5) = 0.7827941 + 0.0260416666 = 0.7853982667$. $<$ **4 pts** $>$ Terme d'erreur en $O(h^4)$ (cf. cours). $<$**1 pt**$>$

---

**IV. Résolution d'équation différentielle (27 pts)**

Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \exp(t) - \frac{1}{t}\, y(t), \tag{6}$$

avec la condition initiale $y(t = 1) = 1$.

(Nota : $\exp(t) = e^t$)

1. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$ et $y(1.4)$ (donner les résultats avec au moins trois décimales). $<$**5 pts**$>$
2. Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler modifié et toujours avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$, et $y(1.3)$ (donner aussi les résultats en gardant au moins trois décimales). De combien a t-on diminué l'erreur d'approximation pour $y(1.3)$ comparativement à la méthode précédente ? $<$**7 pts**$>$
3. Estimer $y(1.2)$ avec la méthode d'Euler et un pas de $h = 0.2$ et en partant toujours de la condition initiale $y(1.0) = 1$. $<$**2 pts**$>$
4. Utiliser la méthode d'extrapolation de Richardson pour combiner $y(1.2)$ obtenu précédemment (avec le pas de $h = 0.2$) et $y(1.2)$ obtenu à la première question (avec un pas $h = 0.1$) pour obtenir une estimation plus précise de $y(1.2)$. Donner l'ordre d'erreur de cette nouvelle estimée que l'on appellera $y_{\text{extra}}(1.2)$ ainsi qu'une approximation de l'erreur faîte sur la valeur réelle de $y(1.2)$. $<$**6 pts**$>$
5. Après avoir remarquer que l'Eq. différentielle (6) s'écrit aussi sous la forme $t\,y'(t) + y(t) = t\,\exp(t)$, et que $t\,y'(t) + y(t) = \frac{d}{dt}(t\,y(t))$, en déduire, considérant toujours la condition initiale $y(1) = 1$, la solution analytique de cette équation différentielle et donner la valeur exacte en $y(t = 1.2)$. $<$**7 pts**$>$

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.1$ et $y_0 = 1.0$.

$$y_{n+1} = y_n + h\big(-\frac{y_n}{t_n} + \exp(t_n)\big)\,.$$

Les valeurs de $t_n$ et $y_n$ sont données dans le tableau ci-dessous,

| $t_n$ | $y_n$ |
|---|---|
| 1.0 | 1.000 |
| 1.1 | 1.172 |
| 1.2 | 1.366 |
| 1.3 | 1.584 |
| 1.4 | 1.829 |

$<$**5 pts**$>$

**2.**

Par la méthode d'Euler modifié, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\big(-\frac{y_n}{t_n} + \exp(t_n)\big)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

Les valeurs de $t_n$, $y_n$ et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous,

| $t_n$ | $\tilde{y}_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 1.0 | - | 1 |
| 1.1 | 1.171828183 | 1.182857475 |
| 1.2 | 1.375741580 | 1.387982808 |
| 1.3 | 1.604329266 | 1.617917131 |

<**5 pts**>

On a diminué l'erreur d'un facteur $O(0.1^1)/O(0.1^2) = 10$. <**2 pts**>

**3.**

Avec la méthode d'Euler et $h = 0.2$ et $y_0 = 1.0$,

$$y(t = 1.2) = y(t = 1.0) + 0.2\Big(-\frac{y(t = 1.0)}{1.0} + \exp(1.0)\Big) = 1.343656\,.$$ < **2 pts** >

**4.**

Avec la formule d'extrapolation de Richardson, on trouve, (ordre d'erreur d'Euler global en O(h)), donc un terme $1/(2^n - 1)$ avec $n = 1$ égale à 1,

$$\begin{aligned} y_{\text{extra}}(t = 0.2) &= y_{[h]}(t = 0.2) + \frac{1}{2^1 - 1}\Big(y_{[h]}(t = 0.2) - y_{[2h]}(t = 0.2)\Big)\,, \\ &= 2\,y_{[h]}(t = 0.2) - y_{[2h]}(t = 0.2)\,, \\ &= 2 \times 1.366 - 1.34365\,, \\ &= 1.38835\,. \end{aligned}$$

<**3 pts**> <**2 pts**>

avec un ordre d'erreur global en $O(h^2)$, ce qui nous donne une approximation de l'erreur faîte sur la valeur réelle de $y(1.2)$, de $\Delta y(1.2) = h^2 = 10^{-2}$. <**1 pt**>

**5.**

On a donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(t\,y(t)) &= t\exp(t)\,, \\ d(t\,y(t)) &= t\exp(t)\,dt\,, \\ t\,y(t) &= \int t\exp(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

et en intégrant maintenant par partie,

$$\begin{aligned} t\,y(t) &= t\exp(t) - \int \exp(t)\,dt\,, \\ t\,y(t) &= t\exp(t) - \exp(t) + Cst\,, \\ y(t) &= \exp(t) - \frac{\exp(t)}{t} + \frac{Cst}{t}\,. \end{aligned}$$

<**4 pts**>

Avec la condition initiale $y(1.0) = 1.0$, on a $Cst = 1$. <**2 pts**>

Du coup, $y(t) = \exp(t) - \frac{\exp(t)}{t} + \frac{1}{t}$.

On obtient donc $y(t = 1.2) = 1.386686153$. <**1 pt**>

---

### V. Système d'Équations Différentielles (15 pts)

Un système à trois corps (comme celui composé de terre-lune-satellite) vérifie le système des deux équations différentielles suivantes,

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= x(t) + 2y'(t) - \frac{\mu_2 (x(t) + \mu_1)}{\left[(x(t) + \mu_1)^2 + (y(t))^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_1 (x(t) + \mu_2)}{\left[(x(t) + \mu_2)^2 + (y(t))^2\right]^{3/2}}, \\
y''(t) &= y(t) - 2x'(t) - \frac{\mu_2\, y(t)}{\left[(x(t) + \mu_1)^2 + (y(t))^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_1\, y(t)}{\left[(x(t) + \mu_2)^2 + (y(t))^2\right]^{3/2}},
\end{aligned}
$$

où $\mu_1$ et $\mu_2$ sont des constantes connues et les conditions initiales sont $x(0) = 0.994$, $x'(0) = 0.0$, $y(0) = 0.0$, $y'(0) = -2.11$. On vous demande de,

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales). <**7 pts**>
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielle, préciser quelle serait le système de relations itératives qui serait obtenu. <**6 pts**>
3. Trouver $x(t = 0.1)$ et $y(t = 0.1)$ lorsque $\mu_1 = \mu_2 = 1$. <**2 pts**>

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

Ces deux équations ne sont pas liés car elles sont déjà sous la forme, $x''(t) = f_1(x'(t), y'(t), x(t), y(t))$ et $y''(t) = f_2(x'(t), y'(t), x(t), y(t))$. En faisant le changement de variable approprié, i.e., en posant,

$z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = y(t)$, $z_3(t) = x'(t)$ et $z_4(t) = y'(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant,

$$
\begin{aligned}
z_1'(t) &= z_3(t), \\
z_2'(t) &= z_4(t), \\
z_3'(t) &= z_1(t) + 2z_4(t) - \frac{\mu_2 (z_1(t) + \mu_1)}{\left[(z_1(t) + \mu_1)^2 + (z_2(t))^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_1 (z_1(t) + \mu_2)}{\left[(z_1(t) + \mu_2)^2 + (z_2(t))^2\right]^{3/2}}, \\
z_4'(t) &= z_2(t) - 2z_3(t) - \frac{\mu_2\, z_2(t)}{\left[(z_1(t) + \mu_1)^2 + (z_2(t))^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_1\, z_2(t)}{\left[(z_1(t) + \mu_2)^2 + (z_2(t))^2\right]^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

< **5 pts** >

Avec les conditions initiales suivantes, $z_1(0) = 0.994$, $z_2(0) = 0.0$, $z_3(0) = 0.0$, $z_4(0) = -2.11$.

<**2 pts**>

Nota : On rappelle qu'avec ce changement de variable, on cherche maintenant $z_1(t) = x(t)$ et $z_2(t) = y(t)$.

$\boxed{\textbf{2.}}$

En posant respectivement $f_1(t) = z_3(t)$, $f_2(t) = z_4(t)$, $f_3(t) = z_1(t) + 2z_4(t) - \ldots$, $f_4(t) = z_2(t) - 2z_3(t) - \ldots$, on obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivant,

$$\begin{aligned}
z_1(t_{n+1}) &= z_1(t_n) + h\, f_1(t_n),\\
z_2(t_{n+1}) &= z_2(t_n) + h\, f_2(t_n),\\
z_3(t_{n+1}) &= z_3(t_n) + h\, f_3(t_n),\\
z_4(t_{n+1}) &= z_4(t_n) + h\, f_4(t_n).
\end{aligned}$$

< **6 pts** >

$\boxed{\textbf{3.}}$

En partant des conditions initiales qui sont $z_1(0) = 0.994$, $z_2(0) = 0.0$, $z_3(0) = 0.0$, $z_4(0) = -2.11$, on obtient immédiatement pour $h = 0.1$,

$x(t = 0.1) = z_1(t = 0.1) = 0.994 + 0.1 \times 0.0 = 0.994$ <**1 pt**>
$y(t = 0.1) = z_2(t = 0.1) = 0.0 + 0.1 \times -2.11 = -0.211.$ <**1 pt**>

Nota : il n'est pas nécessaire de calculer $z_3(t = 0.1)$ et $z_4(t = 0.1)$ qui ne seront utiles que pour l'itération suivante pour calculer $x(t = 0.2)$ et $y(t = 0.2)$ !