DIRO
IFT 2421

# EXAMEN INTRA

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2421/
*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**Date :** *08/03/2005*

| | |
|---|---|
| I ..................... | Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (15 pts). |
| II .................... | Méthode de la Bissection, du Point Fixe et de Newton (31 pts). |
| III ................... | Méthode de Newton à Plusieurs Variables (13 pts). |
| IV ................... | Factorisation $P^tLU$ avec Elimination Gaussienne (20 pts). |
| V .................... | Interpolation de Newton (21 pts). |
| VI ................... | Splines (15 pts). |
| Total ................ | 115 points. |

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

---

**I. Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (15 pts)**

Pour trouver une estimation de la constante de permittivité du vide $\epsilon_0$, C. Coulomb, en 1785, utilisa l'expérimentation suivante,

Il mesura la force ($F = 0.0022 \pm 0.00022$ Newton) nécessaire pour séparer deux plateaux au voltage $V$ ($V = 1000 \pm 50$ Volts), séparés d'une distance $s$ ($s = 0.004 \pm 0.0002$ m) et de diamètre $d$ ($d = 0.10 \pm 0.001$ m). La permittivité du vide $\epsilon_0$ était ensuite liée à toute ces valeurs entachées d'erreur par la relation suivante,

$$F = \frac{1}{8}\frac{\pi d^2\,\epsilon_0}{s^2}V^2.$$

On vous demande :

1. Donner l'approximation de $\epsilon_0$ (i.e., $\epsilon_0^*$). <**4 pts**>
2. (a) Donner l'expression analytique de l'incertitude (totale) de $\epsilon_0$ (i.e., la différentielle $\Delta\epsilon_0(F, V, s, d)$) par la méthode de propagation d'erreur (utilisant l'approximation de Taylor de la fonction au premier ordre). <**5 pts**>
   (b) Exprimer chacun des 4 termes de l'incertitude de $\epsilon_0$ en fonction de $\epsilon_0^*$.[1] <**2 pts**>
   (c) Déterminer ensuite la valeur numérique de l'incertitude totale sur $\epsilon_0$ (i.e., $\Delta\epsilon_0$) a laquelle était parvenue C. Coulomb. <**2 pts**>
3. Souligner les chiffres significatifs "exacts" (cse) de l'approximation de $\epsilon_0$ auquel était parvenu C. Coulomb. <**2 pts**>

---

**Réponse**

**1.**

$$\begin{aligned}
\text{On a,} \qquad \epsilon_0 &= \frac{8\,F\,s^2}{\pi\,d^2\,V^2} \qquad < \textbf{1 pt} > \\
\text{qui nous permet de déduire,} \qquad \epsilon_0^* &= \frac{8\,(0.0022\text{ N})(0.004\text{ m})^2}{\pi(0.1\text{ m})^2(1000\text{ V})^2} \\
&= 8.9636\times10^{-12} \qquad < \textbf{3 pts} > \quad (\text{en } \frac{N}{V^2})
\end{aligned}$$

**2a.**

On obtient la différentielle suivante,

$$\Delta\epsilon_0(F,V,s,d) = \left|\frac{8\,s^2}{\pi\,d^2\,V^2}\right|\Delta F + \left|-\frac{16\,F\,s^2}{\pi\,d^2\,V^3}\right|\Delta V + \left|\frac{16\,F\,s}{\pi\,d^2\,V^2}\right|\Delta s + \left|-\frac{16\,F\,s^2}{\pi\,d^3\,V^2}\right|\Delta d. \qquad < \textbf{5 pts} >$$

**2b.**

La valeur de la contribution de chacune des variables dans l'incertitude totale (i.e., erreur absolue) de $\epsilon_0$ (exprimée pour chaque terme en fonction de $\epsilon_0^*$) est,

[1] i.e., mettre $\Delta\epsilon_0(F,V,s,d)$ sous la forme $\Delta\epsilon_0(F,V,s,d) = a\,\epsilon_0^* + b\,\epsilon_0^* + c\,\epsilon_0^* + d\,\epsilon_0^*$ ou $a,b,c,d$ seront des constantes que vous déterminerez

$$
\begin{aligned}
\Delta\epsilon_0(F,V,s,d) &= \epsilon_0^*\frac{\Delta F}{F} + \epsilon_0^*\frac{2\Delta V}{V} + \epsilon_0^*\frac{2\Delta s}{s} + \epsilon_0^*\frac{2\Delta d}{d} \\
&= 0.1\,\epsilon_0^* + 0.1\,\epsilon_0^* + 0.1\,\epsilon_0^* + 0.02\,\epsilon_0^* \\
&= 0.32\,\epsilon_0^*, \quad < \textbf{2 pts} >
\end{aligned}
$$

**2c.**

$$\Delta\epsilon_0(F,V,s,d) \quad \approx \quad 2.87 \times 10^{-12}. \quad < \textbf{2 pts} >$$

**3.**

$2.87 < 5 \times 10^0$, donc seul le premier chiffre (rang 0) de $\epsilon_0^*$ est significatif et on a :

$$(\underline{8}.9636 \pm 2.87) \times 10^{-12}.$$

$<$**2 pts**$>$

---

## II. Méthode de la Bissection, du Point Fixe et de Newton (31 pts)

On se propose de trouver des valeurs approchées des deux racines $r_1$ et $r_2$ ($r_2 > r_1$) de l'équation $f(x)$ dans l'intervalle $J = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$. On donne le graphe de cette fonction sur l'intervalle $J$ (cf. Fig. 1).

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \tag{1}$$

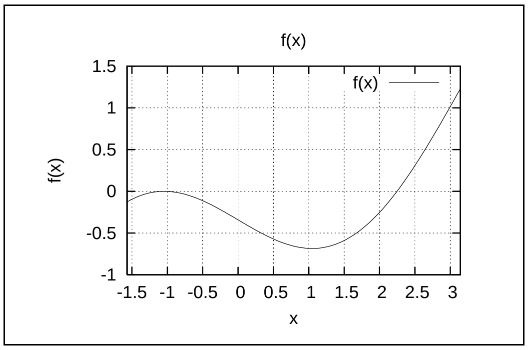


FIG. 1 – Graphe de $f(x)$ sur $J$.

1. **Méthode de la Bissection (6 pts)**.
   (a) Peut-on appliquer la méthode de la bissection pour calculer les deux racines de $f(x)$ sur $J$ ? Justifier qualitativement votre réponse. $<$**2 pts**$>$
   (b) Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance (i.e., précision) de $tol = 10^{-10}$. Exprimer le résultat du nombre minimal d'itérations, littéralement, en fonction de l'intervalle de départ $[a, b]$ et de *tol*. $<$**3 pts**$>$
   (c) Après avoir choisi un intervalle qui vous semble convenable, donner numériquement ce nombre d'itérations. $<$**1 pt**$>$

2. **Méthode de Newton (11 pts)**
   (a) Soit $g(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton ($r_{n+1} = g(r_n)$) pour la résolution de l'Équation (1). Donner $g(x)$ ainsi que cette relation itérative. $<$**3 pts**$>$
   Si on amorce cette relation itérative avec $r_0 = 2$, convergera t-on vers $r_1$ ou $r_2$ ? (dans la suite on appellera $r$ cette racine) $<$**1 pt**$>$
   Rappeler (sans calculer) quelle doit être les conditions pour que cette relation itérative converge (toujours avec $r_0 = 2$ pour amorcer cette relation itérative). $<$**2 pts**$>$
   (b) A l'aide du graphe de la fonction $f(x)$, déduire l'ordre de convergence de la méthode pour les deux racines. Justifier qualitativement votre réponse. $<$**2 pts**$>$
   (c) En déduire une valeur approchée de $r$ après 3 itérations (i.e., donner $r_1, r_2, r_3$) (avec toujours $r_0 = 2.0$). $<$**3 pts**$>$
3. **Méthode du point fixe (14 pts)**
   (a) On considère maintenant la méthode du point fixe, $r_{n+1} = g_2(r_n)$, avec,

$$g_2(x) = \sin x + \frac{x}{2} - (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}), \tag{2}$$

   pour calculer la racine $r_2$, en observant que $r_2 \in I = [\frac{2\pi}{3}, \pi]$, établir si cette méthode de point fixe est convergente. $<$**2 pts**$>$
   (b) Déterminer analytiquement, grâce au théorème des accroissements finis (ou de la valeur moyenne), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou $r_n$ désigne la valeur approchée, à la n-ième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations $n_*$ nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à $10^{-10}$ près de cette racine. $<$**7 pts**$>$
   (c) Calculer les 4 premières estimées $r_1, \ldots, r_4$, en partant de $r_0 = 2.0$. $<$**3 pts**$>$
   (d) Donner le nombre de cse (chiffre significatif exact) de l'estimée $r_4$. $<$**2 pts**$>$

---

**Réponse**

**1a.**

Grâce au graphe donné en Fig. 1, on voit que la fonction $f(x)$ a une racine $r_1$ dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et une autre racine $r_2$ dans l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. On peut appliquer la méthode de la bissection pour calculer la racine $r_2 \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ mais on ne peut pas utiliser cette méthode pour calculer $r_1$ car la condition $f(a).f(b) < 0$ n'est pas satisfaite pour tout $a, b \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $a < b$. $<$**2 pts**$>$

**1b.**

Pour estimer le nombre d'itérations $n$ nécessaire pour estimer $r_2$ en partant de l'intervalle $[a, b]$, pour arriver à la précision *tol*, on considère l'inégalité suivante,

$$tol \geq \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

$$\text{qui conduit à,} \qquad n \;\geq\; \frac{\ln\left(\frac{b-a}{tol}\right)}{\ln 2} - 1, \quad < \mathbf{3\,pts} >$$

**1c.**

Et pour l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$, on a numériquement,

$$
\begin{aligned}
n &\geq \frac{\ln\frac{\pi}{3} + 10\ln 10}{\ln 2} - 1 \\
&\gtrapprox 33. \qquad < \mathbf{1\,pt} >
\end{aligned}
$$

**2a.**

La fonction $f(x)$ est dérivable sur $J$ et on a,

$$
g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \cos x}.
$$

On a donc la formule itérative suivante,

$$
r_{n+1} = r_n - \frac{\frac{r_n}{2} - \sin r_n + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \cos r_n}. \qquad < \mathbf{3pts} >.
$$

On convergera vers $r_2$. $<$**1 pt**$>$

Condition de convergence :

• $r_2$ semble être dans l'intervalle $[2, 3]$ (cf. Fig. 1). Dans cet intervalle, $\frac{1}{2} - \cos r_n \neq 0$ (i.e., $r \neq \pi/6$ [modulo $2\pi$]) et on aura donc aucune division par zéro.

• De plus, en partant de $r_0 = 2.0$, on est pas trop loin de la solution (en tout cas, on est pas séparé de la solution par un minimum local ce que l'on voit sur le graphe). Donc la méthode est assuré de converger. $<$**2 pts**$>$.

La deuxième solution, purement analytique, consisterait à raisonner comme dans le cas d'un point fixe et de démontrer que $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in J$.

**2b.**

Ordre de convergence :

• racine $r_2 \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$. $f(r_2)$ est une fois différentiable ; i.e., $f(r_2) = 0$ et $f'(r_2) \neq 0$, la convergence sera donc quadratique. $<$**1 pt**$>$

• racine $r_1 \in [-\frac{2\pi}{3}, 0]$. $f(r_1)$ est deux fois différentiable, i.e., $f(r_1) = 0$ et $f'(r_1) = 0$ (on voit bien sur le graphe que la tangente de la courbe en $r_1$ est nulle), la convergence sera donc seulement linéaire. $<$**1 pt**$>$

**2c.**

En partant de $r_0 = 2.0$, on a, $r_{n+1} = g(r_n)$ et,

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 2.0, \\
r_1 &= 2.230616197, \\
r_2 &= 2.249782942, \\
r_3 &= 2.244982928. \qquad < \mathbf{3pts} >
\end{aligned}
$$

NOTA : LA SOLUTION CONVERGE VERS 2.246005589

**3a.**

Le graphe et les questions précédentes nous ont montrées qu'il existe une racine unique dans $I = [\frac{2\pi}{3}, \pi]$. Il nous reste à savoir si $g_2(x)$ est contractante sur $I$.

Nous avons $g_2'(x) = \cos x + \frac{1}{2}$.
et,

$-1/2 \geq \cos x \geq -1$ pour $x \in I = [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ (fonction décroissante sur $I$), donc $0 \geq \cos x + 1/2 \geq -1/2$ pour $x \in I$ et finalement $|g_2'(x)| \leq 1/2$, $\forall x \in I$. La fonction $g_2(x)$ est donc contractante sur $I$ et la convergence est assurée. <**2 pts**>

Nota : pour être absolument sur que cela converge, il faudrait prouver aussi que $\forall x \in I, g_2(x) \in I$.

**3b.**

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g_2(r) = r$ et $r_n = g_2(r_{n-1})$ avec $r_n$ la valeur approchée de la racine à la n-ième itération,

$$\begin{aligned}(r_n - r) &= \frac{g_2(r_{n-1}) - g_2(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r), \\ &= g_2'(\zeta) \times (r_{n-1} - r), \qquad \text{avec} \quad \zeta \in I.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité trouvée précédemment $|g_2'(x)| < 1/2$, (i.e., la borne la plus pessimiste), on obtient les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned}|r_n - r| \leq \frac{1}{2}\,|r_{n-1} - r| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |r_{n-2} - r|\,, \\ &\leq \ \ldots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |r_0 - r|\,, \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{3}. \quad < \textbf{5pts} >\end{aligned}$$

On obtiendra obligatoirement donc $|r_n - r| < 10^{-10}$, des que,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{3} &< 10^{-10}, \\ n \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\frac{\pi}{3} &< \ln\left(10^{-10}\right).\end{aligned}$$

Soit pour tout $n > 33$. <**2 pts**>

**3c.**

En partant de $r_0 = 0.5$, on a, $r_n = g_1(r_{n-1})$ et,

$$\begin{aligned}r_0 &= 2.0, \\ r_1 &= 2.251724055, \\ r_2 &= 2.245277691, \\ r_3 &= 2.246096414, \\ r_4 &= 2.245994227. \qquad < \textbf{3pts} >\end{aligned}$$

**3d.**

On a,

$$\begin{aligned}|r_4 - r| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{\pi}{3}, \\ &\lesssim 0.06545 \ < 0.5 \times 10^{-0}.\end{aligned}$$

Selon cette borne supérieure de l'erreur, visiblement très pessimiste, seule le premier chiffre est significatif ! (et donc on peut écrire $r_4 = \underline{2}.24599\ldots$). <**2 pts**>

**III. Méthode de Newton à Plusieurs Variables (13 pts)**

Soit le système suivant,

$$
\begin{aligned}
x^2 - \exp(-y) = & \ \ 0, \\
y^2 - \exp(-z) = & \ \ 0, \\
z^2 - \exp(-x) = & \ \ 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

**Nota :** $\quad \exp(x) = e^x$

1. Déterminer le jacobien de ce système et rappeler la relation itérative de Newton-Raphson à plusieurs variables permettant de résoudre ce système. On prendra $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ et on notera $\mathbf{x}$ à l'itération $n$ par $\mathbf{x}^{(n)}$. $<$**5 pts**$>$
2. Trouver $\mathbf{x}^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})^t$ avec la condition initiale $\mathbf{x}^{(0)} = (x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^t = (0, 0, 0)^t$. $<$**3 pts**$>$
3. Quel système devrait être résolu pour déterminer $\mathbf{x}^{(2)} = (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})^t$ (ne pas résoudre ce système !). $<$**3 pts**$>$
4. Si on utilisait la méthode de Jacobi pour résoudre le système permettant de déterminer $\mathbf{x}^{(2)} = (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)})^t$ , convergerait-il ? Justifier votre réponse. $<$**2 pts**$>$

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

Le jacobien de ce système est, $\quad F'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x & \exp(-y) & 0 \\ 0 & 2y & \exp(-z) \\ \exp(-x) & 0 & 2z \end{pmatrix},$

et la relation itérative de Newton est

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - F'(\mathbf{x}^{(n)})^{-1} F(\mathbf{x}^{(n)}) \qquad < \textbf{5 pts} >$$

.

$\boxed{\textbf{2.}}$

$$\text{On a,} \qquad [F'(\mathbf{x}^{(\mathbf{0})})]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - F'(\mathbf{x}^{(0)})^{-1} F(\mathbf{x}^{(0)}) = (0, 0, 0)^t - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad < \textbf{3 pts} >$$

$\boxed{\textbf{3.}}$

Le système serait $F'(\mathbf{x}^{(1)})^{-1}$, i.e.,

$$[F'(\mathbf{x}^{(1)})]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \exp(-1) & 0 \\ 0 & 2 & \exp(-1) \\ \exp(-1) & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \qquad < \mathbf{3\,pts} >$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$

Oui ce système serait soluble avec la méthode de Jacobi car le système est diagonalement dominant. **<2 pts>**

---

**IV. Factorisation $P^tLU$ avec Élimination Gaussienne (20 pts)**

On veut résoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = b$ où,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que l'algorithme d'élimination de Gauss ne pourrait être exécuté jusqu'au bout pour résoudre le système $A\mathbf{x} = b$ si on n'utilisait pas le pivotage. **<5 pts>**
2. Décomposer la matrice $A$ en produit $P^tLU$ ou $P$ est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et pivotage partiel. **<11 pts>**
3. Calculer le déterminant de $A$. **<4 pts>**

---

**Réponse**

$\boxed{\mathbf{1.}}$

Soit la matrice augmentée suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | \, 1 \\ 2 & 2 & 5 & | \, 2 \\ 4 & 6 & 8 & | \, 5 \end{pmatrix}.$$

L'opération $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - 2\,\text{ligne}_1$ et $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - 4\,\text{ligne}_1$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | \, 1 \\ 0 & 0 & 3 & | \, 0 \\ 0 & 2 & 4 & | \, 1 \end{pmatrix}$$

On voit que le coefficient $a_{2,2}$ (i.e., celui de la deuxième ligne, deuxième colonne de cette matrice) est nul. Donc on ne peut continuer la méthode d'élimination de Gauss. En effet, on ne peut pas faire d'opération du style $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (a_{3,2}/a_{2,2})\,\text{ligne}_2$. **<5 pts>**

$\boxed{\mathbf{2.}}$

On intervertit la ligne 1 et la ligne 3 ce qui donne,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'opération $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - (1/2)\text{ligne}_1$ et $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (1/4)\text{ligne}_1$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & (-1/2) & -1 \end{pmatrix}$$

L'opération $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (1/2)\text{ligne}_2$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (-3/2) \end{pmatrix}$$

On a donc la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P^t<\mathbf{3pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1/2) & 1 & 0 \\ (1/4) & (1/2) & 1 \end{pmatrix}}_{L<\mathbf{4pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (-3/2) \end{pmatrix}}_{U<\mathbf{4pts}>}$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= \det(\mathrm{P}) \times \det(\mathrm{L}) \times \det(\mathrm{U}), \\ &= 1 \times 1 \times (4 \times -1 \times (-3/2)), \\ &= -6. \qquad < \mathbf{4pts} > \end{aligned}$$

---

**V. Interpolation de Newton (21 pts)**
On considère la fonction suivante,

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$$

définie sur l'intervalle $[0, 3]$.

1. Appliquer la formule de Newton pour trouver un polynôme de degré trois qui interpole la fonction $f(x)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. **<10 pts>**
2. Trouver le polynôme de Lagrange de degré trois qui interpole la fonction $f(x)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$. **<4 pts>**
3. Évaluez ensuite le polynôme pour $x = 0.5$. **<2 pts>**
4. Appliquer la formule de votre choix qui permette de trouver le polynôme de collocation de degré 4 qui interpole la fonction $f(x)$ au point $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ et $x_4 = 4$. **<5 pts>**

---

## Réponse

$\boxed{\mathbf{1.}}$

On a donc les points suivants,

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_k$ | 5 | 3 | -3 | 5 |

<**2 pts**>

Le tableau des différences divisées s'écrit,

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | | | |
| | | -2 | | |
| 1 | 3 | | -2 | |
| | | -6 | | 3 |
| 2 | -3 | | 7 | |
| | | 8 | | |
| 3 | 5 | | | |

<**4 pts**>

On obtient le polynôme suivant,

$$P_3(x) = 5 - 2x - 2x(x-1) + 3x(x-1)(x-2). \quad < \mathbf{4\ pts} >$$

**2.**

C'est le même. <**4 pts**>

**3.**

Pour l'interpolation on trouve, $P(0.5) = 5.625$. < **2 pts** >

**4.**

C'est $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$ car le polynôme de degré 4 qui passe par les 5 points de $f(x)$ est unique et c'est f(x). <**5 pts**>

---

**VI. Splines (15 pts)**

1. Rappeler les conditions pour qu'un ensemble de fonctions polynômes définisse une spline cubique. <**2 pts**>
2. Déterminer quelles fonctions parmi les suivantes sont des splines cubiques. Dans l'affirmative, mentionner quel est le type de spline (type I, II, III, IV ou indéterminé). <**6 pts**>

   (a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{19}{2} - \frac{81}{4}x + 15x^2 - \frac{13}{4}x^3 & \text{pour} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{77}{2} + \frac{207}{4}x - 21x^2 + \frac{11}{4}x^3 & \text{pour} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

   (b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x + 2x^2 - x^3 & \text{pour} \quad 10 \leq x \leq 21 \\ -\frac{1}{4}x + 2x^2 - x^3 + \frac{3}{2} & \text{pour} \quad 21 \leq x \leq 22 \\ \frac{6}{4} - \frac{2}{8}x + 2x^2 - x^3 & \text{pour} \quad 22 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{4}x + 2x^2 & \text{pour} \quad 10 \leq x \leq 21 \\ -\frac{1}{4}x + 2x^2 - x^3 + \frac{3}{2} & \text{pour} \quad 21 \leq x \leq 22 \\ \frac{6}{4} - \frac{2}{8}x + 2x^2 - x^3 & \text{pour} \quad 22 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

3. Déterminer la spline cubique $f(x)$ passant par les trois points suivant,

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | 1 | 4 |
| $f_{x_i}$ | 0 | 3 | -3 |

et telle que les conditions additionnelles $f''(-2) = 0$ et $f''(4) = 0$ soient satisfaites. Dire qu'elle est le type de cette spline. $<$**7 pts**$>$

---

**Réponse**

**1.**

Une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ est une *spline* cubique relative au noeuds $x_i$ si,

1- $f(x)$ est un polynôme cubique (i.e., $f(x) \in P_3$),
2- le raccord entre ces courbes est le plus doux possible (continuité de $f$, $f'$, $f''$, (i.e., $f \in C^2$)).
$<$**2 pts**$>$

**2a.**

1. $f(x) \in P_3$ dans $[1, 2]$, $f(x) \in P_3$ dans $[2, 3]$ et,

$$\begin{aligned} f(2^-) &= f(2^+) = 3 \\ f'(2^-) &= f('2^+) = 0.75 \\ f''(2^-) &= f(''2^+) = -9 \end{aligned}$$

qui assure que la fonction est de classe $C^2$. En plus,

$$f'(1) = f'(3) = 0$$
$$f''(1) = 7.5 \neq f''(3) = 10.5$$

Connaissant $f''(2)$, calculé précédemment. La spline est donc de type indéterminée. $<$**2 pts**$>$

**2b.**

Les trois morceaux de la fonctions appartiennent au même polynôme d'ordre trois. La continuité en $f$, $f'$ et $f''$ est donc vérifié. De plus, puisque $f'(10) \neq f'(24)$, la spline est de type indéterminé. $<$**2 pts**$>$

**2c.**

$f(21^-) \neq f(21^+)$, la continuité de la fonction n'est pas rempli. ce n'est donc pas une spline cubique (en plus le premier morceau de la fonction n'est pas pas d'ordre trois). $<$**2 pts**$>$

**3.**

Pour une spline passant par $n$ points, on à tout d'abord un système de $n-2$ équations à résoudre. Pour $n=3$, une équation unique permet de déterminer $S_2$, la dérivée seconde de $f(x)$ au point $x_2$. Cette équation est ($h_1 = h_2 = 3$) ;

$$2(h_1+h_2)S_2 \quad = \quad 6\Big(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\Big),$$

conduisant à $12S_2 = -18$ et donc $S_2 = -\frac{3}{2}$.

On a donc $S_1 = 0, \quad S_2 = -3/2 \quad S_3 = 0$, qui nous permettront de trouver pour le premier polynôme,

$a_1 = (S_2 - S_1)/6h_1 = ((-3/2)-0)/18 = -1/12$, $b_1 = S_1/2 = 0$, $c_1 = [(y_2-y_1)/h_1] - h_1(2S_1+S_2)/6 = [(3-0)/3] - 3(2\times 0 + (-3/2))/6 = (21/12)$, $d_1 = y_1 = 0$.

Et pour le deuxième polynôme,

$a_2 = (1/12)$, $b_2 = (-3/4)$, $c_2 = (-1/2)$, $d_2 = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(x+2)^3 + \frac{21}{12}(x+2) & \text{pour} \quad -2 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{4}(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{3}{2} & \text{pour} \quad 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

**<6 pts>**

C'est une spline naturelle. **<1 pt>**