DIRO
IFT 2421

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *19/04/2006*

I	Moindres Carrés (33 pts).
II	Intégration Numérique (29 pts).
III	Résolution d'Équation Différentielle (35 pts).
IV	Système d'Équations Différentielles (17 pts).
Total	114 points.

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Moindres Carrés (33 pts)

1. Le carbone radioactif ^{14}C est produit dans l'atmosphère par l'effet des rayons cosmiques sur l'azote atmosphérique et il est absorbé par les organismes vivants (animaux, plantes, etc.) qui, par suite, contiennent un certain pourcentage de carbone radioactif. Lorsqu'un organisme meurt, ses échanges avec l'atmosphère cessent et la radioactivité due au carbone ^{14}C décroît suivant la loi exponentielle suivante :

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t)$$

où λ est une constante positive, t représente le temps en année et $A(t)$ est la radioactivité exprimée en nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone. On désire estimer les paramètres A_0 et λ par la méthode des moindres carrées. Pour cela, on analyse les troncs (le bois est un tissu mort) de très vieux arbres (*Séquoia* par exemple) et par un prélèvement sur le tronc, on peut obtenir : 1) son âge t en année, en comptant le nombre des anneaux de croissance et 2) sa radioactivité A en mesurant le nombre de désintégrations. On obtient les mesures suivantes :

t_i	500	1000	2000	3000	4000	5000	6300
$A_i = A(t_i)$	14.5	13.5	12.0	10.8	9.9	8.9	8.0

On désire trouver les coefficients A_0 et λ au sens des moindres carrés.

(a) Écrire ce problème d'estimation des paramètres au sens des moindres carrés sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\theta} \parallel r(\theta) \parallel_2^2$$

dans lequel on donnera l'expression de $r(\theta)$.
<3 pts>

(b) Trouver les coefficients A_0 et λ au sens des moindres carrés. On donnera les données suivantes,

$\sum_{i=1}^{N} \ln[A(t_i)] \approx 16.699319$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{N} t_i \ln[A(t_i)] \approx 49249.09284$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{N} t_i^2 = 94940000$

où N est le nombre de points ($N = 7$) (ces données et plus précisément aucune/certaines/toutes de ses égalités vous permettrons de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question).
<9 pts>

(c) On trouve maintenant l'ossement d'un animal qui produit un nombre de désintégrations (par minute et par gramme de carbone) égale à $A(t_{inconnu}) = 0.025$ (ou en fait, 1 désintégration, en moyenne, toute les 40 minutes, par gramme de carbone).
Utiliser les valeurs estimées précédemment pour estimer (i.e., extrapoler) l'âge de cet ossement.
<3 pts>

———————

2. En économie, on rencontre souvent une loi dite "loi en U" qui a pour expression

$$y(x) = \frac{a}{x} + b\,x$$

Cette loi donne, par exemple, le prix de revient unitaire d'un produit dans lequel rentre une partie fixe a qui est à répartir sur les x unités produites et un coût unitaire de fabrication bx qui dépend de la quantité produite de ce même produit.

(a) Donner l'expression $R(a, b)$ appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients a et b et des x_i, $y_i = y(x_i)$) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés.
<3 pts>

(b) Démontrer que les équation normales permettant de trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés de cette loi sont les suivantes :

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2} + bN &= \sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{x_i} \\ aN + b\sum_{i=1}^{N}x_i^2 &= \sum_{i=1}^{N}y_i\,x_i \end{cases}$$

où N est le nombre de points de donnés.
<9 pts>

(c) Utiliser les valeurs estimées a et b au sens des moindres carrée sur les données ci dessous pour interpoler $y(x = 1.75)$.

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5
$y_i = y(x_i)$	8	6	5.5	7.5	9

On donnera le tableau suivant,

$\sum_{i=1}^{N}x_i^2 = 13.750$	$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i^2} \approx 5.854$
$\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{x_i} \approx 33.017$	$\sum_{i=1}^{N}y_i\,x_i = 55.750$

où N est ici le nombre de points ($N = 5$) de ce problème (ce tableau et plus précisément certaines/toutes de ses égalités vous permettrons de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question).
<6 pts>

Réponse

1(a)

Le résidu $Res(A_0, \lambda)$ que l'on cherche à minimiser par la technique des moindres carrés est,

$$Res(A_0, \lambda) = \sum_{i=1}^{7}\big[A_i - A_0\exp(-\lambda t_i)\big]^2.$$

que l'on peut exprimer comme la minimisation du carré de la norme 2 (norme euclidienne) du vecteur (7 lignes et 1 colonne) $r(\theta)$ suivant,

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} A_1 - A_0\exp(-\lambda t_1) \\ A_2 - A_0\exp(-\lambda t_2) \\ \dots \\ A_7 - A_0\exp(-\lambda t_7) \end{pmatrix}.$$

dans lequel $\theta = (A_0, \lambda)$ est le vecteur de paramètres que l'on cherche. <**3 pts**>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

On va linéariser le problème en faisant le changement de variable suivant : $z(t_i) = \ln[A(t_i)]$, i.e.,

$$\begin{aligned} z(t_i) &= \ln A_o - \lambda\, t_i \\ &= a + b\, t_i \end{aligned}$$

avec $a = \ln A_o$ et $b = -\lambda$, qui nous conduit à la distribution linéaire des données $(z(t_i), t_i)$ dont les paramètres (a, b) sont solution des équations normales ou du système matriciel suivant,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i^2 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i\, z(t_i) \\ \sum_{i=1}^N z(t_i) \end{pmatrix}$$

En utilisant les informations données à l'énoncé, on en déduit,

$$\begin{pmatrix} 94940000 & 21800 \\ 21800 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49249.09284 \\ 16.699319 \end{pmatrix}$$

puis par une opération élémentaire,

$$\begin{pmatrix} 94940000 & 21800 \\ 0 & 1.994312197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49249.09284 \\ 5.390806003 \end{pmatrix}$$

et enfin, par substitution arrière, on trouve $a \approx 2.703$ et $b \approx -1.0192 \times 10^{-4}$, c'est à dire, $A_o = \exp a \approx 14.924$ et $\lambda = 1.0192 \times 10^{-4}$, pour une loi de la forme,

$$A(t) = 14.924 \exp\left(-1.0192 \cdot 10^{-4}\, t\right)$$

<**9 pts**>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

On se trouve avec la résolution de l'équation suivante,

$$\begin{aligned} 14.924 \exp\left(-1.0192\ 10^{-4}\, t\right) &= 0.025 \\ t &\approx 62714 \quad \text{(en années)} \end{aligned}$$

< **3 pts** >

$\boxed{\textbf{2(a)}}$

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est,

$$R(a, b) = \sum_{i=1}^{7} \left[y_i - \frac{a}{x_i} - b x_i\right]^2.$$

< **3 pts** >

$\boxed{\textbf{2(b)}}$

Trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés, c'est trouver a et b pour que $R(a,b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre a donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(a,b)}{\partial a} &= 2\sum_{i=1}^{7}\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)\frac{\partial\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)}{\partial a} \\ &= -2\sum_{i=1}^{7}\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)\,\frac{1}{x_i} \end{aligned}$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ est donc,

$$a \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} + b \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{x_i} \qquad \text{ou} \qquad a \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} + bN = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{x_i}$$

La dérivation par rapport au paramètre b donne,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(a,b)}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{7}\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)\frac{\partial\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)}{\partial b} \\ &= -2\sum_{i=1}^{7}\big(y_i - \frac{a}{x_i} - bx_i\big)\,x_i \end{aligned}$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$ est donc,

$$a\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}\, x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \qquad \text{ou} \qquad aN + b\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes,

$$\left\{ \begin{aligned} a\textstyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} + bN &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{x_i} \\ aN + b\textstyle\sum_{i=1}^{N} x_i^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} y_i\, x_i \end{aligned} \right.$$

<9 pts>

2(c)

les paramètres (a,b) sont solution des équations normales ou du système matriciel trouvé à la question précédente, i.e., en utilisant les informations données à l'énoncé,

$$\begin{pmatrix} 5.854 & 5.000 \\ 5.000 & 13.750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.017 \\ 55.750 \end{pmatrix}$$

puis par une opération élémentaire,

$$\begin{pmatrix} 5.854 & 5.000 \\ 0 & 9.480 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33.017 \\ 27.549 \end{pmatrix}$$

et enfin, par substitution arrière, on trouve $b \approx 2.906$ et $a \approx 3.158$, pour une loi de la forme,

$$y(x) = \frac{3.158}{x} + 2.906\,x$$

<4 pts>

Pour $x = 1.75$, on a donc

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{3.158}{1.75} + 2.906 \times 1.75 \\ y(x) &\approx 6.89 \end{aligned}$$

<2 pts>

II. Intégration Numérique (29 pts)

Soit l'intégrale suivante,

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,(\ln x)^2\,dx. \tag{1}$$

1. **Méthode des trapèzes.**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
   <5 pts>

   (b) Donner une approximation grossière de l'erreur commise par la méthode d'intégration numérique précédente.
   <2 pts>

   (c) Supposons que l'on ne connaisse pas l'expression analytique de la fonction $f(x)$ mais seulement des valeurs discrétisées de cette fonction à des abscisses équidistantes séparées d'un pas $h = 0.25$ (i.e., $f(1.0)$, $f(1.25)$, $f(1.50)$, $f(1.75)$, $f(2.0)$). Déterminer maintenant une approximation d'une borne supérieure de la valeur absolue de cette erreur en utilisant pour la dérivées seconde de $f(x)$ une approximation de cette dérivée par la (ou les) approximation(s) numérique(s) de votre choix. Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts dans la valeur estimée de l'intégrale trouvée en (1.(a)).
   <5 pts>

   (d) Déterminer maintenant une borne supérieure de la valeur absolue de cette erreur en utilisant la connaissance de l'expression analytique de la fonction $f(x)$. Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts dans la valeur estimée de l'intégrale trouvée en (1.(a)).
   <5 pts>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes.**
   (a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I.
   <6 pts>

3. **Méthode analytique itérative.**
   Soit $I(n)$, l'intégrale $I = \int_1^2 x\,(\ln x)^n\,dx$. Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(2) = \int_1^2 x\,(\ln x)^2\,dx$. On se propose de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative.
   (a) Montrer avec une intégration par partie que nous avons la relation $I(n) = 2(\ln 2)^n - \frac{n}{2} I(n-1)$.
   <3 pts>

(b) Calculer $I(0) = \int_1^2 x\,dx$ analytiquement puis en déduire ce que l'on cherche, i.e., $I(2)$ grâce à la relation de récurrence trouvée précédemment.
<**3 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned}
I_{1,4} &= (0.25/2)\Big(f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2)\Big) \quad < \mathbf{3\ pts} > \\
I_{1,4} &\approx (0.25/2)\Big(0 + 0.1244826112 + 0.4932058618 + 1.096094405 + 0.960906028\Big) \\
I_{1,4} &\approx 0.3343361133 \quad < \mathbf{2\ pts} >
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Terme d'erreur en $O(h^2)$ avec $h = 0.25$, i.e., une erreur approximatif de ≈ 0.0625. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

On a les points suivants ;

x	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
$f(x)$	0.0	0.0622	0.2466	0.548	0.961

L'erreur E sur cette intégrale s'écrit $\frac{-h^2}{12}(2-1)f''(\xi)$, avec $\xi \in [1,2]$ et nous allons approximer numériquement $f''(\xi)\quad \forall \xi \in [1,2]$ par l'approximation numérique centrée suivante pour les points $x = 1.25$, $x = 1.50$, $x = 1.75$,

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

et les approximations numériques suivantes pour le premier ($x = 1.0$) et dernier ($x = 2.0$) point respectivement,

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

et son équivalent

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

Ce qui nous donne $f''(x = 0) \approx 1.955$, $f''(x = 1.25) \approx 1.955$, $f''(x = 1.50) \approx 1.872$, $f''(x = 1.75) \approx 1.786$, $f''(x = 2.00) \approx 1.786$. <**1.5 pts**>

On prend la valeur max en valeur absolue, i.e., $f''(x = 1.0) \approx 1.955$, et la borne supérieure s'écrit,

$$\begin{aligned}
|E| &\lessapprox \frac{(0.25)^2}{12} \times (2-1) \times 1.955 \qquad < \mathbf{1\ pt} > \\
|E| &\lessapprox 0.0102
\end{aligned}$$

$|E| < 0.0102 < 0.05$ donc un chiffre est significatif après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}_{1,4}$. <**1 pt**>

$\boxed{\textbf{1(d)}}$

On peut calculer les dérivés analytique successive de la fonction f.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\,(\ln x)^2 \\
f'(x) &= (\ln x)^2 + 2\ln x \\
f''(x) &= \frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} \qquad <\textbf{2 pts}> \\
f'''(x) &= -\frac{2}{x^2}\ln x
\end{aligned}$$

Sur $[1,2]$, $f'''(x) < 0$, ce qui montre que $f''(x)$ est décroissante sur $[1,2]$, ce qui montre qu'une borne supérieure pour $f''(x)$ nous est donné par $|f''(1.0)|$ ou $|f''(2.0)|$. Dans notre cas $|f''(1.0)| = 2.0$ et $|f''(2.0)| = 1.69$, donc notre borne supérieure est $f''(x) < 2$ <**1 pt**> sur $[1,2]$ et,

$$\begin{aligned}
|E| &< \frac{(0.25)^2}{12}\times(2-1)\times 2.0 \qquad < \textbf{1 pt} > \\
|E| &< 0.0104
\end{aligned}$$

$|E| < 0.0104 < 0.05$ donc un chiffre est significatif après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}_{1,4}$. <**1 pt**>

$\boxed{\textbf{2(a)}}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{t+3}{2}$, pour lequel $dx = \frac{1}{2}\,dt$, <**1 pt**>
nous obtenons,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 x\,(\ln x)^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t+3}{2}\Big(\ln(\frac{t+3}{2})\Big)^2 \qquad <\textbf{2 pts}> \\
&\approx \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}/3+3}{2}\Big(\ln(\frac{\sqrt{3}/3+3}{2})\Big)^2 + \frac{-\sqrt{3}/3+3}{2}\Big(\ln(\frac{-\sqrt{3}/3+3}{2})\Big)^2\right) \qquad <\textbf{1 pt}> \\
&\approx \frac{1}{2}\,(0.6047750416 + 0.04452166743) \\
&\approx 0.3246483545 \qquad <\textbf{2 pts}>
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3(a)}}$

On a en faisant une intégration par partie,

$$I(n) = \int_1^2 x(\ln x)^n\,dx = [\frac{x^2}{2}\,(\ln x)^n]_1^2 - \frac{n}{2}\int_1^2 x(\ln x)^{n-1}\,dx = 2(\ln 2)^n - \frac{n}{2}\,I(n-1) \qquad < \textbf{3 pts} >$$

$\boxed{\textbf{3(b)}}$

$$\begin{aligned}
I(0) &= \frac{1}{2}\,[x^2]_1^2 = \frac{3}{2} \\
I(1) &= 2(\ln 2) - \frac{1}{2}\frac{3}{2} = 2\ln 2 - \frac{3}{4} = 0.636294361 \\
I(2) &= 2(\ln 2)^2 - 2(\ln 2) + \frac{3}{4} \approx 0.3246116669
\end{aligned}$$

On a donc $I(2) \approx 0.3246116669$. <**3 pts**>

Nota : Connaissant la valeur analytique de cette intégrale, on peut apprécier la précision obtenue avec la méthode des trapèzes composites et la borne supérieure de son erreur obtenue. On peut apprécier aussi la précision de la méthode des quadratures Gaussiennes.

III. Résolution d'équation différentielle (35 pts)

1. Retrouver la méthode itérative d'Euler modifiée en intégrant les deux membres d'une équation différentielle du premier ordre du type $y'(t) = f(t, y(t))$ et en approximant l'une des deux intégrations par une approximation numérique que l'on précisera.
   <**5 pts**>

2. Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{t}{2\,y(t)} + \frac{y(t)}{2\,t} \tag{2}$$

   avec la condition initiale $y(t=1) = 1$.

   (a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$ et $y(1.4)$ (donner les résultats avec au moins trois décimales).
   <**5 pts**>

   (b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$, $y(1.2)$, et $y(1.3)$ (donner aussi les résultats en gardant au moins trois décimales).
   <**5 pts**>

   (c) A partir des estimations de $y(1.1)$, $y(1.2)$, $y(1.3)$ estimées à la question (a) et (b), en déduire la fonction analytique qui pourrait être solution de l'équation différentielle (2) et qui remplirait la condition initiale $y(t=1) = 1$. Vérifier que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle (2) et indiquer dans ce cas, en le justifiant, l'erreur commise par la méthode d'Euler et d'Euler modifiée.
   <**5 pts**>

   (d) On prendra maintenant la condition initiale $y(t=1) = 0.5$.
   Résoudre cette équation avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(1.1)$ et $y(1.2)$ (donner aussi les résultats en gardant au moins trois décimales).
   <**5 pts**>

   (e) On voudrait maintenant améliorer $y(1.2)$ avec une stratégie itérative utilisant son estimée obtenue à la question précédente et une stratégie du type "point fixe". Dire comment cela est possible et proposer donc un raffinement numérique de $y(1.2)$ qui utiliserait cette stratégie.
   <**4 pts**>.

3. On voudrait résoudre analytiquement cette équation différentielle.

   (a) En posant $y = t\,x$, montrer que l'équation différentielle (2) s'écrit,

$$\frac{dt}{t} = \frac{2\,x}{1 - x^2}\,dx$$

   et intégrer les deux membres de cette égalité, puis en remplaçant de nouveau x par y/t, estimer l'expression analytique de $y(t)$ pour respectivement les conditions initiales $y(t=1) = 1$ et $y(t=1) = 0.5$.
   <**6 pts**>.

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

On intègre $y'(t) = f(t, y(t))$ entre les bornes t_n et t_{n+1} et, on approxime le second membre par l'aire du trapèze sous la fonction $f(t, y(t))$, i.e.,

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \\
[y(t)]_{t_n}^{t_{n+1}} &= \mathcal{A}\text{ire du trapèze sous } f(t, y(t)) \\
y_{n+1} - y_n &= \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\Big)
\end{aligned}$$

<**5 pts**>

2(a)

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.1$ et $y_0 = 1.0$,

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\frac{t_n}{2\,y_n} + \frac{y_n}{2\,t_n}\Big)$$

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous,

t_n	y_n
1.0	1.000
1.1	1.100
1.2	1.200
1.3	1.300
1.4	1.400

<**5 pts**>

2(b)

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\Big(\frac{t_n}{2y_n} + \frac{y_n}{2t_n}\Big)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous,

t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
1.0	-	1.000
1.1	1.100	1.100
1.2	1.200	1.200
1.3	1.300	1.300

<**5 pts**>

2(c)

La fonction $y(t)$ semble être $y(t) = t$. On peut le vérifier facilement en essayant de voir si cette fonction

1. satisfait la condition initiale (oui puisque $y(t = 1) = 1$ et
2. satisfait l'équation différentielle (2), ce qui est vrai car :

$$(t)' = 1 = \frac{t}{2\,t} + \frac{2}{2\,t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Dans ce cas l'erreur commise par la méthode d'Euler et d'Euler modifiée est nulle car ces deux méthodes approximent parfaitement une droite ; en effet le terme d'erreur local est respectivement en $\frac{h^2}{2} y''(t)$ et $\frac{h^3}{6} y'''(t)$ qui dans le cas de $y(t) = t$ est nulle et donc dans les 2 cas, l'erreur global est nulle.

<5 pts>

$\boxed{\mathbf{2(d)}}$

En prenant maintenant la condition initiale $y(t=1) = 0.5$, les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous,

t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
1.0	-	0.500
1.1	0.625	0.621
1.2	0.737	0.735

<5 pts>

$\boxed{\mathbf{2(e)}}$

En fait la relation du style "point fixe" qui nous permettra d'améliorer la solution $y(1.2)$ est la relation $y(1.2) = g(y(1.2))$ donné par la méthode d'Euler modifiée, i.e.,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big)$$

Il suffit de considérer que y_{n+1} donné à la question précédente est $y_{n+1}^{[0]}$ et que,

$$y_{n+1}^{[1]} = y_n + \frac{h}{2}\Big(\frac{t_n}{2\,y_n} + \frac{y_n}{2\,t_n} \quad + \quad \frac{t_{n+1}}{2\,y_{n+1}^{[0]}} + \frac{y_{n+1}^{[0]}}{2\,t_{n+1}}\Big)$$

Par utilisation de la relation précédente, on trouve donc,

$$\begin{aligned} y(1.2)^{[1]} &= 0.621 + \frac{0.1}{2}\Big(\frac{1.1}{2\times 0.621} + \frac{0.621}{2\times 1.1} \quad + \quad \frac{1.2}{2\times 0.735} + \frac{0.735}{2\times 1.2}\Big) \\ &= 0.621 + 0.05(1.167941 + 1.122576) \\ &= 0.735 \end{aligned}$$

<4 pts>

Nota : Le calcul ci dessus et le résultat obtenu à la question 2(d) montre qu'il y a de grande chance que l'on ait le résultat avec une erreur moins grande que 10^{-3}.

$\boxed{\mathbf{3}}$

En posant $y = t\,x$, on a

$$\begin{aligned} y'(t) = \frac{dx}{dt}\,t + x &= \frac{t}{2\,t\,x} + \frac{t\,x}{2\,t} \\ \frac{dx}{dt}\,t &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1-x^2}{2\,x}\Big) \\ \frac{dt}{t} &= \frac{2\,x}{1-x^2}\,dx \end{aligned}$$

<3 pts>

En intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve,

$$\begin{aligned} \ln|t| &= -\ln|1-x^2| \\ 1-x^2 &= \frac{K}{t} \end{aligned}$$

Et remplaçons x par y/t,

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{t^2}-1 &= -\frac{K}{t} \\ y^2-t^2+Kt &= 0 \end{aligned}$$

Pour $y(t=1)=1$, $K=0$ et $y(t)=t$ pour $t>0$ et pour $y(t=1)=0.5$, $K=0.75$ et on trouve une hyperbole, i.e.,

$$y(t)=\sqrt{t^2-0.75t}$$

<3 pts>

Nota : Par calcul analytique, on trouve donc, pour la condition initiale $y(t=1)=0.5$, $y(t=1.1)=0.6204836823$ et $y(t=1.2)=0.7348469228$.

IV. Système d'Équations Différentielles (17 pts)

Soit l'équation différentielle d'ordre 3 suivante,

$$y'''(t)-3y'(t)+2y(t) \;=\; 0 \tag{4}$$

où les conditions initiales sont $y(0)=0.0$, $y'(0)=1.0$, $y''(0)=1.0$.

On vous demande de,

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <6 pts>
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielle, préciser quelle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <5 pts>
3. Trouver $y(t=0.1)$, $y(t=0.2)$ et $y(t=0.3)$ par cette méthode d'Euler ordinaire.
   <6 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En faisant le changement de variable suivant, i.e., en posant,
$y_1(t)=y'(t)$,
$y_2(t)=y_1'(t)$,
on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant,

$$\begin{cases} y_2'(t) &= 3y_1(t) - 2y(t) \\ y_1'(t) &= y_2(t) \\ y'(t) &= y_1(t) \end{cases} \qquad < \textbf{4 pts} >$$

Avec les conditions initiales suivantes, $y(0) = 0.0$, $y_1(0) = 1.0$ et $y_2(0) = 1.0$. $<$**2 pts**$>$

Nota : On rappelle qu'avec ce changement de variable, on cherche $y(t)$ et que $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont des fonctions intermédiaires, respectivement dérivé première et seconde de la fonction inconnue $y(t)$ que l'on cherche.

$\boxed{\textbf{2.}}$

En posant respectivement,
$f_1(t, y(t), y_1(t), y_2(t)) = 3y_1(t) - 2y(t)$, $f_2(t, y(t), y_1(t), y_2(t)) = y_2(t)$, $f_3(t, y(t), y_1(t), y_2(t)) = y_1(t)$
on obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivant,

$$\begin{cases} y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n) + h\, f_3(t_n, y(t_n), y_1(t_n), y_2(t_n)) \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n) + h\, f_2(t_n, y(t_n), y_1(t_n), y_2(t_n)) \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, f_1(t_n, y(t_n), y_1(t_n), y_2(t_n)) \end{cases}$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n) + h\,\big(3y_1(t_n) - 2y(t_n)\big) \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n) + h\, y_2(t_n) \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + h\, y_1(t_n) \end{cases}$$

$<$**5 pts**$>$

$\boxed{\textbf{3.}}$

En partant des conditions initiales qui sont $y(0) = 0.0$, $y_1(0) = 1.0$ et $y_2(0) = 1.0$, on obtient immédiatement pour $h = 0.1$,

$$\begin{cases} y(0.1) &= y(0.0) + 0.1\, y_1(0.0) = \boxed{0.1} \\ y_1(0.1) &= y_1(0.0) + 0.1\, y_2(0.0) = 1.1 \\ y_2(0.1) &= y_2(0.0) + 0.1\,\big(3y_1(0.0) - 2y(0.0)\big) = 1.3 \end{cases}$$

$<$**2 pts**$>$

Puis,

$$\begin{cases} y(0.2) &= y(0.1) + 0.1\, y_1(0.1) = \boxed{0.21} \\ y_1(0.2) &= y_1(0.1) + 0.1\, y_2(0.1) = 1.23 \\ y_2(0.2) &= y_2(0.1) + 0.1\,\big(3y_1(0.1) - 2y(0.1)\big) = 1.61 \end{cases}$$

$<$**2 pts**$>$

Puis,

$$\begin{cases} y(0.3) &= y(0.2) + 0.1\, y_1(0.2) = \boxed{0.333} \\ y_1(0.3) &= y_1(0.2) + 0.1\, y_2(0.2) = . \\ y_2(0.3) &= y_2(0.2) + 0.1\,\big(3y_1(0.2) - 2y(0.2)\big) = . \end{cases}$$

$<$**2 pts**$>$