DIRO
IFT 2421

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377.
Http : //www.iro.umontreal.ca/~mignotte/ift2421/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *07/03/2006*

I	Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (21 pts).
II	Erreur en Arithmétique Flottante et Évaluation d'Expression (17 pts).
III	Méthode du Point Fixe et de Newton (35 pts).
IV	Factorisation P^tLU (23 pts).
V	Interpolation (25 pts).
Total	121 points.

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (21 pts)

Soit un parallélépipède rectangle dont les trois longueurs des cotés (respectivement hauteur, longueur et largeur) sont, h, l et L. Pour chacune de ces variables, on a l'imprécision suivante,

- $h = 40$ mètres, avec une erreur relative de 0.1%.
- $l = 40.3$ mètres, avec le "3" étant considéré comme dernier chiffre significatif "exact" (cse).
- $L \in [40.2, 40.6]$, i.e., L est une valeur (exprimée en mètres) élément de cette intervalle de confiance.

On vous demande de :

1. Exprimer, pour chacune de ces trois variables, l'incertitude que l'on a sur elle en la mettant sous la forme $x = x^\star \pm \Delta x$ où $x^\star$ et Δx seront déterminés. $<$**6 pts**$>$
2. Donner l'approximation du volume V de ce parallélépipède rectangle (donnée par le produit de ces trois cotés, i.e., V^*) $<$**2 pts**$>$, et l'incertitude de V (i.e., ΔV) par la méthode de propagation d'erreur (utilisant l'approximation de Taylor de la fonction au premier ordre). $<$**3 pts**$>$ Souligner les chiffres significatifs "exacts" (cse) de ce résultat. Arrondir cette approximation aux nombres de cse adéquat. $<$**2 pts**$>$ Donner finalement l'intervalle de confiance dans lequel se trouverait la vraie valeur de V obtenue par cette méthode (en utilisant les approximations non arrondies). $<$**2 pts**$>$
3. Peut on utiliser la méthode de la fourchette pour obtenir cette incertitude ? Si oui expliquer pourquoi $<$**2 pts**$>$ et utiliser cette méthode (de la fourchette) pour obtenir un intervalle de confiance dans lequel se trouverait la vraie valeur de V et en déduire l'incertitude résultante (i.e., erreur absolue) sur V que l'on obtiendrait par cette méthode. $<$**4 pts**$>$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

L'erreur relative de la première variable nous permet de calculer l'erreur absolue que l'on fait sur cette mesure, i.e., $\Delta h = 0.04$ et donc d'écrire $h = 40.0 \pm 0.04$. $<$**2 pts**$>$

Le fait que le chiffre des dixièmes "3" (de rang -1) soit le dernier chiffre significatif nous permet de trouver une borne supérieure $\Delta l = 0.5 \times 10^{-1}$ de l'erreur absolue d'estimation faîte sur cette mesure et donc d'écrire $l = 40.3 \pm 0.05$. $<$**2 pts**$>$

Finalement, la connaissance, pour la mesure L d'un intervalle de confiance, nous permet d'écrire ; d'une part que la valeur approximée pour cette variable sera le centre de cette intervalle et d'autre part que son erreur absolue est la demi largeur de cet intervalle, i.e., $L = 40.4 \pm 0.2$. $<$**2 pts**$>$

Nota : La réponse qui consistait à poursuivre le calcul avec pour chacune de ces incertitudes, une borne d'erreur supérieure du style $h = 40.0 \pm 0.05$ $l = 40.3 \pm 0.05$ $L = 40.4 \pm 0.5$ est correcte aussi.

$\boxed{\textbf{2.}}$

On a pour valeur approchée,

$$V^* = 40 \times 40.3 \times 40.4 = 65124.8\, m^3. \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Pour calculer l'incertitude de V, on doit calculer la différentielle $\Delta V(h, l, L)$, i.e.,

$$\Delta V(h,l,L) = |l \times L|\ \Delta h + |h \times L|\ \Delta l + |h \times l|\ \Delta L. \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Soit,

$$\begin{aligned}
\Delta V(h,l,L) &= |40.3 \times 40.4| \times 0.04 + |40.0 \times 40.4| \times 0.05 + |40 \times 40.3| \times 0.2 \\
&= 65.1248 + 80.8 + 322.4 \\
&\approx 468.3248. \qquad < \textbf{1 pt} >
\end{aligned}$$

On obtient donc $V \approx 65124.8 \pm 468.3248$. Comme $468.3248 < 0.5 \times 10^3$, le rang du dernier chiffre significatif est 3 et on peut écrire $V \approx \underline{65}124.8 \pm 468.3248$ $<$**1 pt**$>$. Si on arrondi finalement cette estimation aux nombres de cse, adéquat, on obtient,

$$V \approx 65 \times 10^3 \pm 500 \quad (\text{en } \ \mathrm{m}^3). \quad < \mathbf{1\ pt} >$$

Si on utilise les approximations non arrondies, V se trouverait dans l'intervalle $[64656.4752\ ,\ 65593.1248]$. $<$**2 pts**$>$

$\boxed{\mathbf{3.}}$

La méthode de la fourchette peut être utilisée ici car la fonction $V(l, L, h) = l \times L \times h$ est strictement monotone (en fait croissante) sur $I\!R$ donc sur toute intervalle borné. Il est donc possible, en utilisant les valeurs minimales pour l, L, h de déterminer la borne minimale pour V et en utilisant les valeurs maximales pour l, L, h de déterminer la borne maximale pour V (en fait il est tout simplement possible de calculer le volume min et max en se servant respectivement des l, L, h longueurs min et max !). $<$**2 pts**$>$

$$\begin{aligned} V_{\text{min}} &= (40 - 0.04) \times (40.3 - 0.05) \times (40.4 - 0.2) = 64657.278 \quad < \mathbf{1\ pt} > \\ V_{\text{max}} &= (40 + 0.04) \times (40.3 + 0.05) \times (40.4 + 0.2) = 65593.9284 \quad < \mathbf{1\ pt} > \end{aligned}$$

La valeur approximée est donc le centre de cette intervalle de confiance et l'incertitude sur V serait la demi largeur de cette intervalle. Ce qui nous permet d'écrire $V \approx 65125.6032 \pm 468.3252$. $<$**2 pts**$>$

II. Erreur en Arithmétique Flottante et Évaluation d'Expression (17 pts)

1. Expliquer pourquoi le calcul numérique de ces expressions,

   (a) $\exp(x) - \exp(-x)$, quand $x \approx 0$,

   (b) $\sqrt{x^2 + 1} - 1$, quand $x \approx 0$,

   (c) $\sum_{x=1}^{x=100} \frac{1}{x^3}$

   peuvent conduire à des problèmes d'erreurs numériques ; Expliquer pourquoi (i.e., identifier et citer le problème numérique associé) et proposer une formule équivalente qui permettrait d'éviter ces problèmes numériques et qui permettrait d'augmenter la précision des calcul de ces trois expressions.
   $<$**9 pts**$>$

2. Évaluer l'expression suivante :

   $$x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \ldots}}}$$

   Pour cela, prenez le cube de cette expression (i.e., calculer x^3, en déduire ensuite une équation du type $f(x) = 0$ pour laquelle x est solution et utiliser la méthode itérative de Newton en partant de $x_{[0]} = 1$ (Nota : ici l'indice indique l'itération). Calculer les 6 premiers termes de cette méthode itérative.
   $<$**8 pts**$>$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Pour le premier et deuxième cas, on aura un problème d' annulation de cse due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux <**1 pt**>. Pour éviter ce problème, on peut écrire ces deux relations de telle façon que plus aucune soustraction de deux nombres incertains (i.e., imprécis) quasi égaux apparaissent. Pour la première expression on va utiliser le développement limité de $\exp(x)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
\exp(x) - \exp(-x) &\approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) - \big(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\big), \\
&\approx 2x + o(x^3), \qquad x \approx 0. \quad < \textbf{2 pts} >
\end{aligned}$$

Pour la seconde expression, on va simplement multiplier l'expression par $\sqrt{x^2+1}+1$ et de ce fait obtenir,

$$\sqrt{x^2+1} - 1 \;=\; \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}, \qquad x \approx 0. \quad < \textbf{3 pts} >$$

qui ne pose plus de problème d'annulation de cse.

Pour le troisième problème, l'erreur numérique viendra du fait que l'on va faire au tout début de cette somme, une addition entre valeur d'ordre de grandeur différente <**1 pt**>, ce qui va accumuler de l'imprécision. Il faut donc mieux calculer tous les petits termes entre eux puis ensuite additionner ce résultat aux termes plus grand de cette série. Pour faire simple, il vaut mieux calculer numériquement cette série dans le sens inverse !

$$\sum_{x=100}^{x=1} \frac{1}{x^3}. \qquad < \textbf{2 pts} >$$

$\boxed{\textbf{2.}}$

On s'aperçoit facilement que $x^3 = 3 + x$ <**3 pts**> et donc que x est solution de l'équation $x^3 - x - 3 = 0$. La relation itérative de Newton nous permet d'écrire,

$$\begin{aligned}
x_{[n+1]} &= x_{[n]} - \frac{f(x_{[n]})}{f'(x_{[n]})}, \qquad k = 0, 1, \ldots \\
&= x_{[n]} - \frac{x_{[n]}^3 - x_{[n]} - 3}{3x_{[n]}^2 - 1}. \qquad < \textbf{3 pts} >
\end{aligned}$$

ce qui nous permet de trouver,

$$\begin{aligned}
x_{[0]} &= 1.0, \\
x_{[1]} &= 2.5, \\
x_{[2]} &= 1.929577465, \\
x_{[3]} &= 1.7078664, \\
x_{[4]} &= 1.672558473, \\
x_{[5]} &= 1.671700382. \\
x_{[6]} &= 1.671699882. \\
&\ldots
\end{aligned}$$

qui semble converger vers $x = 1.671699882$ très rapidement.

<**2 pts**>

III. Méthode du Point Fixe et de Newton (35 pts)

On se propose de trouver une valeur approchée d'une des deux racines de l'équation,

$$f(x) = x\ln(x) - 1.25 = 0. \tag{1}$$

1. **Méthode du point fixe**
   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette équation (1) dans l'intervalle $J = [1.65, 2]$. En remarquant que l'équation proposée est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \frac{1.25}{\ln x}$, montrer que cet intervalle est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe n'est pas assurée. <**4 pts**>

   (b) En prenant toujours le même intervalle J dans lequel nous sommes assuré d'avoir une racine, proposer une autre fonction $g_2(x)$, tel que $g_2(x) = x$ soit équivalente à l'Eq. (1) et pour laquelle la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe n'est toujours pas assurée ! <**3 pts**>

   (c) Montrer que l'équation (1) est aussi équivalente à $g_3(x) = x$ avec $g_3(x) = \exp(1.25/x)$ et que sur J, la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe est cette fois ci assurée. <**3 pts**>

   (d) En utilisant donc l'équivalence de l'équation (1) avec $g_3(x) = x$, déterminer analytiquement, grâce au théorème des accroissements finis (ou de la valeur moyenne), une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la n-ième itération, de cette racine par la méthode itérative du point fixe. En déduire le nombre d'itérations n_* nécessaire pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-1} près de cette racine. <**7 pts**>
   Aurait-on pu, sans utiliser ce théorème des accroissement finis, prévoir que la vitesse de convergence de cette méthode du point fixe soit si lente ? Comment ? Justifier votre réponse. <**2 pts**>

   (e) Calculer les 4 premières estimées $r_1, \ldots, r_4$, en partant de $r_0 = 1.65$. <**3 pts**>

2. **Méthode de Newton**
   (a) Soit $g_4(x)$, la fonction intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution de l'équation (1). Donner $g_4(x)$ ainsi que la relation itérative $r_{n+1} = g_4(r_n)$. On prendra $r_0 = 1.65$ pour amorcer cette relation itérative. <**4 pts**>

   (b) En déduire une valeur approchée de r après 4 itérations (i.e., donner r_1, r_2, r_3, r_4) (avec toujours $r_0 = 1.65$). <**3 pts**>

   (c) En vous aidant de ce que vous avez fait en démonstration, dire quelle majoration de $|r_{n+1} - r_n|$ en fonction de $g_4'(x)$ (et dans laquelle r_n désigne la valeur approchée, à la n-ième itération, de cette racine par la méthode de Newton) nous permettrait ensuite de déduire le nombre d'itérations n_* nécessaire pour obtenir, par cette méthode de Newton, une valeur approchée à 10^{-1} près de cette racine (nota : ne pas calculer ce nombre d'itérations optimale). <**6 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1a.}}$

L'étude des variations de la fonction f sur $J = [1.65, 2]$ montre que la fonction est continue et décroissante sur cet intervalle (donc monotone) ($f'(x) = \ln(x) + 1$ et $f'(x) > 0 \;\; \forall\, x \in [1.65, 2]$). <**1 pt**> De plus, on a $f(1.65) = 1.65\ln(1.65) - 1.25 \approx -0.423720$ et $f(2) = 2\ln(2) - 1.25 \approx 0.136294$. <**1 pt**> Il existe donc une racine r unique dans cet intervalle. De plus,

$$g_1'(x) = -\frac{1.25}{x(\ln(x))^2}.$$

Le calcul de $|g_1'(x = 1.65)| \approx 1.5128 > 1$. Donc $|g_1'(x)| \nless 1 \quad \forall x \in J$, et ce contre exemple nous suffit pour nous permettre d'affirmer que la convergence n'est pas assurée sur J. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1b.}}$

En prenant $g_2(x) = x + x\ln(x) - 1.25$, on a une nouvelle fois l'équivalence entre l'équation $x = g_2(x)$ et l'Eq. (1). Néanmoins, une fois de plus la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe n'est toujours pas assurée car $g_2'(x) = \ln(x) + 2$ et sur J, $|g_2'(x)| \nless 1$, $\forall x \in J$ (en fait $|g_2'(x)|$ est toujours supérieur à $2 + \ln 1.65 \approx 2.5$ sur J). <**3 pts**>

Nota : On peut prendre aussi toute formes du style $g_2(x) = \frac{1}{n}(nx + x\ln(x) - 1.25)$ qui ne serait pas contractante (i.e., qui ne convergerait pas).

$\boxed{\textbf{1c.}}$

On vérifie rapidement que $x = \exp(1.25/x)$ sur J correspond bien à l'Eq. (1).

$$\begin{aligned} x &= \exp(1.25/x) \\ \ln x &= 1.25/x \\ x\ln x - 1.25 &= 0 \\ f(x) &= 0. \qquad < \textbf{1 pt} > \end{aligned}$$

En considérant $g_3(x) = x$, on a donc une nouvelle fois l'équivalence avec l'Eq. (1). De plus, $g_3'(x) = -1.25\,\frac{\exp(1.25/x)}{x^2}$. Si on calcule $g_3''(x) = (2.5x^{-3} + 1.5625x^{-4})\exp(1.25/x)$, on s'aperçoit que $g_3''(x)$ prend des valeurs positifs sur J, donc que $g_3'(x)$ est croissante et donc que $g_3'(x) \in [-0.979, -0.5838]$ sur J. De ce fait $|g_3'(x)| < 1$ et cela nous permet de dire que la convergence est bien assurée sur J. <**2 pts**>

$\boxed{\textbf{1d.}}$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g_3(r) = r$ et $r_n = g_3(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la n-ième itération,

$$\begin{aligned} (r_n - r) &= \frac{g_3(r_{n-1}) - g_3(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r) \\ &= g_3'(\zeta) \times (r_{n-1} - r), \qquad \text{avec} \quad \zeta \in J. \qquad < \textbf{2 pts} > \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|g_3'(x)| <\approx 0.98$ <**1 pt**>, (i.e., la borne la plus pessimiste trouvée à la question 1c), on obtient les inégalités suivantes,

$$\begin{aligned} |r_n - r| \leq (0.98)\,|r_{n-1} - r| &\leq (0.98)^2\,|r_{n-2} - r| \\ &\leq \ldots \\ &\leq (0.98)^n\,|r_0 - r| \\ &\leq (0.98)^n \times 0.35. \quad < \textbf{3 pts} > \end{aligned}$$

On obtiendra obligatoirement donc $|r_n - r| < 10^{-1}$, dès que,

$$\begin{aligned} (0.98)^n \times 0.35 &< 10^{-1} \\ n\ln(0.98) &< \ln(10^{-1}) - \ln 0.35. \end{aligned}$$

Soit pour tout $n \geqslant 63$ (ce qui montre que la convergence va être très lente ...) <**2 pts**>

On aurait put prévoir cette lenteur de convergence en voyant que $|g_3'(x)| < 1$ mais tout juste, à cause de sa borne de droite très proche de 1 (donc la fonction n'est que tout juste contractante) (pour vous en persuader, calculer le nombre d'itérations nécessaire pour arriver à la précision voulue lorsque $|g_3'(x)| <$ à une valeur très proche de 0). <**2 pts**>

1e.

En partant de $r_0 = 1.65$, on a, $r_n = g_3(r_{n-1})$ et,

$$\begin{aligned} r_0 &= 1.65 \\ r_1 &= 2.133098799 \\ r_2 &= 1.796790331 \\ r_3 &= 2.005081994 \\ r_4 &= 1.86528816. \quad < \textbf{3 pts} > \end{aligned}$$

Note : Cela semble converger très lentement vers la valeur 1.918508201.

2a.

La fonction $f(x)$ est dérivable sur J et on a,

$$g_5(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x\ln(x) - 1.25}{\ln(x) + 1}.$$

On a donc la formule itérative suivante,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \frac{r_n \ln(r_n) - 1.25}{\ln(r_n) + 1} \\ &= \frac{r_n + 1.25}{\ln(r_n) + 1}. \qquad < \textbf{4 pts} > \end{aligned}$$

En partant de $r_0 = 1.65$, on a, $r_n = g_4(r_{n-1})$ et,

$$\begin{aligned} r_0 &= 1.65 \\ r_1 &= 1.93233459 \\ r_2 &= 1.918538094 \\ r_3 &= 1.918508201 \\ r_4 &= 1.918508201. \quad < \textbf{3 pts} > \end{aligned}$$

Note : Cela semble converger très vite vers la valeur 1.918508201.

2b.

En reprenant les éléments de corrections de la démonstration 2, qui utilisent le théorème des accroissements finis, on a la relation,

$$\begin{aligned} 10^{-1} > |r_n - r| &= \frac{1}{|1 - g_4'(\zeta)|} \times |r_{n+1} - r_n| \\ 10^{-1} &> K \times |r_{n+1} - r_n| \\ \frac{10^{-1}}{K_s} &> |r_{n+1} - r_n| \end{aligned}$$

avec K_s une borne supérieur pour K (i.e., $K_s = \arg\max \frac{1}{|1-g_4'(\zeta)|}$), ce qui nous permettrait d'estimer le nombre d'itérations n_* nécessaire pour obtenir une valeur approchée à 10^{-1} près de cette racine (et qui nous indiquerait que cette convergence serait très rapide). <**6 pts**>

IV. Factorisation $P^t LU$ (23 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit $P^t LU$ ou P est la matrice de permutation par la méthode d'élimination de Gauss et sans pivotage. $<$**9 pts**$>$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le déterminant de A. $<$**3 pts**$>$
3. Mettez sous forme compacte (i.e., en utilisant une seule matrice) cette décomposition LU. $<$**2 pts**$>$
4. Si on avait utilisé la méthode directe, est-ce que cette décomposition aurait été différente ? Justifier votre réponse. $<$**2 pts**$>$
5. Calculer la décomposition LU directe de la matrice A. $<$**5 pts**$>$
6. Calculer la première colonne de l'inverse de la matrice D en utilisant le moins d'opération possible. $<$**2 pts**$>$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

L'opération $\text{ligne}_2 = \text{ligne}_2 - (2)\,\text{ligne}_1$ et $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (4)\,\text{ligne}_1$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

L'opération $\text{ligne}_3 = \text{ligne}_3 - (5/3)\text{ligne}_2$ donne,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a donc la décomposition suivante, (la matrice P^t, étant la simple matrice identité puisque l'on a pas fait de permutation au cours de l'opération de triangulation) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^t <\textbf{1 pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & (5/3) & 1 \end{pmatrix}}_{L <\textbf{4 pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{U <\textbf{4 pts}>}.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}) &= \det(\mathrm{P}) \times \det(\mathrm{L}) \times \det(\mathrm{U}), \\ &= 1 \times (1 \times 3 \times 6), \\ &= 18. \quad < \textbf{3 pts} > \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3.}}$

$$LU_{\text{compact}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 12 \\ 4 & (5/3) & 6 \end{pmatrix}$$

<2 pts>

$\boxed{\textbf{4.}}$

Oui car cette fois ci on aurait eu une décomposition LU faisant apparaître des “1” sur la diagonal de la matrice U. **<2 pts>**

$\boxed{\textbf{5.}}$

Le calcul direct se fait immédiatement et on trouve,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 18 \\ 4 & 13 & 38 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{L:<\textbf{2.5 pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U:<\textbf{2.5 pts}>}$$

$\boxed{\textbf{6.}}$

Comme cela a été vu dans le premier devoir, la première colonne x_1 de la matrice D^{-1} est donnée par la résolution du système $Dx_1 = b$ avec b le vecteur unitaire. Par substitution avant, on trouve facilement, $b = (1,\ -2\ -2/3)$. **<2 pts>**

V. Interpolation (25 pts)

Soit les points suivants,

x_k	-1	1	5	7	11	13
y_k	1	-3	2	2	4	6

1. Appliquer la formule de votre choix pour trouver le polynôme de collocation d'ordre 3 (i.e., celui qui passe par les points de donnés) et qui interpole **au mieux** la valeur au point d'abscisse $x = 10$. Réaliser cette dernière interpolation.
   <12 pts>
2. On ajoute un point supplémentaire, i.e., le point ($x = 9$; $y = 4$). Appliquer la formule de votre choix qui vous permettrait de trouver le polynôme de collocation d'ordre 3 qui interpole **au mieux** la valeur au point d'abscisse $x = 10$ et qui permettrait d'avoir une bonne approximation de l'erreur en ce point avec un minimum de calcul. Réaliser cette interpolation (au point d'abscisse $x = 10$) et donner une approximation de l'erreur commise.
   <13 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Comme les points ne sont pas équidistants, on ne peut utiliser que ; 1) la méthode de Lagrange ou 2) la méthode de Newton. On utilisera cette deuxième méthode. On doit aussi utiliser un polynôme de collocation

d'ordre trois, il nous faut donc quatre points. Puisque l'énoncé nous propose 6 points et précise que l'on doit interpoler **au mieux**, le points d'abscisse $x = 10$, on prendra donc les points qui encercle le mieux ce points, c'est à dire les quatre derniers points.
<**3 pts**>.

En prenant donc les quatre derniers points, le tableau des différences divisées s'écrit,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
5	$\boxed{2}$			
		$\boxed{0}$		
7	2		$\boxed{1/12}$	
		1/2		$\boxed{0}$
11	4		1/12	
		1		
13	6			

<**4 pts**>

On obtient le polynôme suivant,

$$P_3(x) = 2 + (1/12)(x-5)(x-7). \qquad < \mathbf{4\ pts} >$$

Pour l'interpolation on trouve,

$$\begin{aligned} P(10) &= 2 + (15/12) \\ &= 3.25. \qquad < \mathbf{1\ pt} > \end{aligned}$$

2.

Le plus simple, le plus précis et le moins coûteux en calcul serait maintenant d'utiliser la méthode de Newton Gregory sur les quatre points $(7\ ;\ 2)(9\ ;\ 4)(11\ ;\ 4)(13\ ;\ 6)$ qui sont équidistants et qui nous permettrait d'avoir une bonne approximation de l'erreur faite sur cette interpolation. <**3 pts**>

En prenant donc les quatre point mentionnés précédemment (plus le point avant pour pouvoir calculer une approximation de l'erreur commise), le tableau des différences s'écrit,

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5	2				
		0			
7	$\boxed{2}$		2		
		$\boxed{2}$		-4	
9	4		$\boxed{-2}$		8
		0		$\boxed{4}$	
11	4		2		
		2			
13	6				

<**3 pts**>

On obtient le polynôme suivant,

$$P_3(s) = 2 + 2s - \frac{2}{2}s(s-1) + \frac{4}{6}s(s-1)(s-2). \qquad < \textbf{4 pts} >$$

avec $s = (x-7)/2$, donc en $x = 10$; $s = 3/2$ et on trouve pour valeur interpolée,

$$\begin{aligned} P_3(s = 3/2) &= 2 + 2(3/2) - (3/2)(1/2) + 2/3(3/2)(1/2)(-1/2) \\ &\approx 5 - 1 = 4. \qquad < \textbf{1 pts} > \end{aligned}$$

Avec une erreur approximée de l'ordre de $\frac{1}{24}s(s-1)(s-2)(s-3)\Delta^4 y_0$ en $s = 3/2$, ce qui nous donne

$$|E_{\text{interpolation}}| = \frac{9}{384} \times 8 = \frac{9}{48} \approx 0.1875$$

.

$$<\textbf{2 pts}>$$