DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *18/04/2007*

I	Moindres Carrés (44 pts)
II	Intégration Numérique (36 pts)
III	Résolution d'Équation Différentielle (21 pts)
IV	Système d'Équations Différentielles (11 pts)
Total	112 points

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Moindres Carrés (44 pts)

En pharmacologie, enzymologie ou encore biochimie ou écologie, on rencontre fréquemment des lois dites "hyperboliques" qui ont pour expression

$$y\,(x) = \frac{a\,x}{b + x}$$

Cette loi donne, par exemple, la grandeur d'une concentration d'un produit fourni par une réaction enzymatique (ou l'activité d'une enzyme) en fonction de la concentration d'une autre substance (une substance nutritive par exemple). En biologie marine, cette loi intervient, par exemple, dans le taux de croissance (y) du phytoplancton en fonction de la concentration d'un élément nutritif (x).

La grandeur y (qui est un taux biologique) étant entachée d'une erreur expérimentale, on cherchera dans ce problème, à estimer, pour une série de N données expérimentales ($y_i = y(x_i)$), les paramètres a et b de cette loi par la méthode des moindres carrées.

---

1. (a) Donner l'expression $R(a, b)$ appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients a et b et des N données expérimentales x_i,$y_i = y(x_i)$) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés.
   <3 pts>

   (b) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés de cette loi (i.e., le système d'équations qui permettra ensuite de trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés).
   <9 pts>

   (c) Sans résoudre ce système d'équations, dire quel(s) type(s) de méthode(s) numérique permettrait de le résoudre.
   <3 pts>

---

2. (a) On va maintenant tenter de linéariser le problème pour pouvoir arriver à deux équations normales linéaires qui seraient facilement solvables. Le changement de variables que l'on va considérer dans un premier temps est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 1/y \\ w & = & 1/x \end{array} \right.$$

   En utilisant ce changement de variables, montrer que les données $z_i = z(w_i)$ vont se répartir linéairement.
   <4 pts>

   (b) En utilisant les données expérimentales données par le tableau ci dessous, estimer maintenant a et b au sens des moindres carrées.

x_i	0.5	1.0	2.0	4.0	10
$y_i = y(x_i)$	1.8	1.2	2.4	3.9	6.7

   On donnera le tableau suivant

$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i} = 3.85$	$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i^2} = 5.3225$
$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_i} \approx 2.21122$	$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_i\,x_i} \approx 2.23181$

où N est ici le nombre de points ($N = 5$) de ce problème (ce tableau et plus précisément certaines/toutes de ses égalités vous permettront de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question).
<8 pts>

(c) Utiliser les valeurs précédemment estimées de a et b pour interpoler $y(x = 3.0)$.
<3 pts>

—————

3. (a) Pour ce type de problème, les changements de variables conduisant à la linéarité du modèle ne sont pas unique et on peut considérer, par exemple le changement de variables suivant

$$\begin{cases} z &= x/y \\ w &= x \end{cases}$$

En utilisant ce changement de variables, montrer que les données $z_i = z(w_i)$ vont se répartir aussi linéairement.
<3 pts>

(b) En utilisant les données expérimentales précédentes et le tableau ci dessous, estimer a et b au sens des moindres carrées.
<6 pts>

$\sum_{i=1}^{N} x_i = 17.5$	$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 121.5$
$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{y_i} \approx 4.4626$	$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{y_i} \approx 21.6668$

(c) Utiliser les valeurs précédemment estimées de a et b pour interpoler $y(x = 3.0)$.
<3 pts>

—————

4. Qu'est ce qui rendrait cette estimation des moindres carrées plus robuste au bruit ? Vous pouvez proposer plusieurs solutions possibles.
<2 pts>

Réponse

1(a)

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a\, x_i}{b + x_i} \Big)^2 \qquad < \textbf{3 pts} >$$

1(b)

Trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés, c'est trouver a et b pour que $R(a,b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre a donne :

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a\, x_i}{b + x_i} \Big) \frac{\partial \big(y_i - \frac{a\, x_i}{b+x_i} \big)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a\, x_i}{b + x_i} \Big) \Big(-\frac{x_i}{b + x_i} \Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ est donc

$$a \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{x_i}{b + x_i} \Big)^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{x_i\, y_i}{b + x_i} \Big)$$

La dérivation par rapport au paramètre b donne

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{N}\Big(y_i - \frac{a\,x_i}{b+x_i}\Big)\,\frac{\partial\big(y_i - \frac{a\,x_i}{b+x_i}\big)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{N}\Big(y_i - \frac{a\,x_i}{b+x_i}\Big)\,\Big(-\frac{a\,x_i}{(b+x_i)^2}\Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$ est donc

$$a\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i^2}{(b+x_i)^3}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i\,y_i}{(b+x_i)^2}\Big)$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes,

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i}{b+x_i}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i\,y_i}{b+x_i}\Big) \\ a\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i^2}{(b+x_i)^3}\Big) = \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{x_i\,y_i}{(b+x_i)^2}\Big) \end{cases}$$

<**9 pts**>

1(c)

On a un système de deux équations non linéaires à résoudre, on pourrait utiliser la méthode de Newton (-Raphson) ou la méthode des points fixes pour le résoudre. <**3 pts**>

2(a)

On a, avec le changement de variables ($z = 1/y$ et $w = 1/x$)

$$\begin{aligned} y &= \frac{a\,x}{b+x} \\ \frac{1}{y} &= \frac{b+x}{ax} = \frac{b}{a}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \\ z &= \frac{b}{a}\,w + \frac{1}{a} \\ z &= A\,w + B \end{aligned}$$

qui nous conduit à la distribution linéaire des données $(z(w_i) = z_i, w_i)$ avec les paramètres (A, B) (avec $A = \frac{b}{a}$ et $B = \frac{1}{a}$). <**4 pts**>

2(b)

Au sens des moindres carrés, les paramètres (A, B) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 & \sum_{i=1}^{N} w_i \\ \sum_{i=1}^{N} w_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} w_i\,z_i \\ \sum_{i=1}^{N} z_i \end{pmatrix}$$

En utilisant les informations données à l'énoncé, on en déduit

$$\begin{pmatrix} 5.3225 & 3.85 \\ 3.85 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23181 \\ 2.21122 \end{pmatrix}$$

< **3 pts** >

puis par une opération élémentaire ($R_2 = R_2 - \frac{3.85}{5.3225} R_1 \ \triangleright\ R_2 = R_2 - 0.7233 R_1$)

$$\begin{pmatrix} 5.3225 & 3.85 \\ 0 & 2.21512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.23181 \\ 0.59685 \end{pmatrix}$$

et enfin, par substitution arrière, on trouve $B \approx 0.2694$ et $A \approx 0.2244$ <**2 pts**>, c'est à dire, $b/a = 0.2244$ et $1/a = 0.2694$, ou $a = 3.7113$ et $b = 0.8328$ pour finalement une loi de la forme

$$y(x) = \frac{3.7113\, x}{0.8328 + x} \qquad < \mathbf{3\ pts} >$$

2(c)

$$y(3.0) = \frac{3.7113 \times 3.0}{0.8328 + 3.0} \approx 2.9049 \qquad < \mathbf{3\ pts} > \boxed{\text{RJCF :1.5/3}}$$

3(a)

On a, avec le changement de variables ($z = x/y$ et $w = x$)

$$\begin{aligned} y &= \frac{a\,x}{b + x} \\ \frac{x}{y} &= \frac{b + x}{a} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\,x \\ z &= \frac{b}{a} + \frac{1}{a}\,w \\ z &= B + A\,w \end{aligned}$$

qui nous conduit à la distribution linéaire des données ($z(w_i) = z_i, w_i$) avec les paramètres (A, B) (avec $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{b}{a}$). <**3 pts**>

3(b)

Au sens des moindres carrés, les paramètres (A, B) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} w_i^2 & \sum_{i=1}^{N} w_i \\ \sum_{i=1}^{N} w_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} w_i\, z_i \\ \sum_{i=1}^{N} z_i \end{pmatrix}$$

En utilisant les informations données à l'énoncé, on en déduit

$$\begin{pmatrix} 121.5 & 17.5 \\ 17.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.6668 \\ 4.4626 \end{pmatrix} \qquad < \mathbf{2\ pts} >$$

puis par une opération élémentaire ($R_2 = R_2 - \frac{17.5}{121.5} R_1 \ \triangleright\ R_2 = R_2 - 0.144 R_1$)

$$\begin{pmatrix} 121.5 & 17.5 \\ 0 & 2.479 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.6668 \\ 1.34118 \end{pmatrix}$$

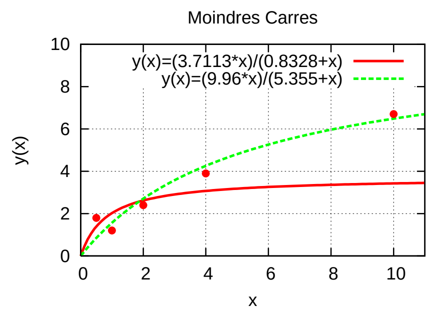
et enfin, par substitution arrière, on trouve $B \approx 0.54$ et $A \approx 0.1004$ <**2 pts**>, c'est à dire, $b/a \approx 0.54$ et $1/a \approx 0.10$, ou $a \approx 9.96$ et $b \approx 5.355$ pour finalement une loi de la forme

$$y(x) = \frac{9.96\, x}{5.355 + x} \qquad < \mathbf{2\ pts} >$$

$\boxed{\textbf{3(c)}}$

$$y\,(3.0) = \frac{9.96 \times 3.0}{5.355 + 3.0} \approx 3.5763 \qquad < \textbf{3 pts} > \boxed{\text{RJCF :1.5/3}}$$

Nota : On peut noter qu'il y a une différence impressionnante entre le résultat de l'interpolation des deux méthodes (i.e., question 2(c) et 3(c)). Il faut comprendre que dans les deux cas on se ramène à une linéarité (et donc à des équations normales facilement solubles) mais avec un changement de variables différent. Toute transformation, comme ce changement de variables, se fait au prix d'une modification de la structure des erreurs. Ainsi, le premier changement de variables, accordera une plus grande importance aux faibles valeurs de y_i, le deuxième changement de variables, quand à lui, donnera une plus grande importance aux fortes valeurs de y_i. Si on ne fait pas de changement de variables et on résout le système d'équations non linéaires obtenu en 1(c), on donnera une égale importance à toutes les valeurs de y_i.
Dans certains cas, donner, grâce aux modèle considéré, une plus grande importance au plus forte valeurs de y_i est préféré par les statisticiens et par les biologistes qui savent que les plus forte valeurs de y (ici il s'agit de concentration) sont aussi les mesures qui sont les plus fiables (i.e., les moins entachés d'erreurs de mesure) et dont il est préférables d'accorder une plus grande importance (i.e., confiance) dans le processus d'interpolation.



Sur le graphique ci-dessus, on voit que le deuxième changement de variable (donnant une plus grande importance aux fortes valeurs de y_i) assure le résidu le plus faible et est sans doute la meilleur interpolation dans ce cas. La première transformation est dite de Lineweaver-Burke et la seconde est dite de Woolf.

$\boxed{\textbf{3.}}$

Plus de données ou si un paramètre de la loi était connu ou si un point de donné était connu.
<**2 pts**>

II. Intégration Numérique (36 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \ln\sqrt{x}\,dx \tag{1}$$

1. **Méthode des trapèzes**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
   <**5 pts**>
   (b) Donner une approximation grossière de l'erreur commise par la méthode d'intégration numérique précédente.
   <**2 pts**>

(c) Supposons que l'on ne connaisse pas l'expression analytique de la fonction $f(x)$ mais seulement des valeurs discrétisées de cette fonction à des abscisses équidistantes séparées d'un pas $h = 0.25$ (i.e., $f(1.0)$, $f(1.25)$, $f(1.50)$, $f(1.75)$, $f(2.0)$). Exploiter ces valeurs discrétisées pour déterminer une approximation de la borne supérieure de la valeur absolue de cette erreur. Déterminer le nombre de chiffres significatifs exacts dans la valeur estimée de l'intégrale trouvée en (1.(a)).
<**5 pts**>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**

(a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec deux termes pour calculer une valeur approchée de I.
<**6 pts**>

3. **Méthode Analytique**
Avec le changement de variable $y = \sqrt{x}$ et une intégration par partie, résoudre cette intégrale.
<**5 pts**>

4. **Quadrature de Radau**
Utiliser la méthode que vous souhaitez pour déterminer le système d'équations (on ne vous demande pas de résoudre ce système) permettant de trouver les poids d'intégration w_1 et w_2 ainsi que le point d'intégration x_2 de sorte que la formule suivante (que l'on appelle quadrature de Radau)

$$J = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(x_2) \tag{2}$$

soit de degré de précision le plus élevé possible. Vérifier que $w_1 = 1/2$, $w_2 = 3/2$ et $x_2 = 1/3$ est solution de ce système et donner le degré de précision le plus élevé possible de cette méthode (en donnant par exemple la valeur de n où n est le degré le plus élevé du polynôme que cette méthode intégrera parfaitement).
<**7 pts**>

5. **Précision des Méthodes Numériques**
Si on vous donne un tableau de six points régulièrement espacés, trouvé les trois méthodes numériques vues en cours les plus précises (par ordre décroissant de précision) en donnant leur ordre de précision respectif.
(Nota : on supposera que l'équidistance des points est $h << 1$ et que le terme d'erreur de la méthode de Simpson 1/3 et 3/8 en quadrature composite contient des termes pairs et impairs.)
<**6 pts**>

Réponse

1(a)

On obtient, par la méthode des trapèzes,

$$\begin{aligned} I_{1,4} &= (0.25/2)\Big(f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2)\Big) \quad < \textbf{3 pts} > \\ I_{1,4} &\approx (0.25/2)\Big(0 + 0.2231435514 + 0.4054651082 + 0.559615788 + 0.345735903\Big) \\ I_{1,4} &\approx 0.1918497548 \quad < \textbf{2 pts} > \end{aligned}$$

1(b)

Terme d'erreur en $O(h^2)$ avec $h = 0.25$, i.e., une erreur approximatif de ≈ 0.0625. <**2 pts**>

1(c)

On a les points suivants

x	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
$f(x)$	0.0	0.1115	0.2027	0.2798	0.3465

L'erreur E sur cette intégrale s'écrit $\frac{-h^2}{12}(2-1)f''(\xi)$, avec $\xi \in [1,2]$ et nous allons approximer numériquement $f''(\xi) \quad \forall \xi \in [1,2]$ par l'approximation numérique centrée suivante pour les points $x = 1.25$, $x = 1.50$, $x = 1.75$

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

et les approximations numériques suivantes pour le premier ($x = 1.0$) et dernier ($x = 2.0$) point respectivement

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

et son équivalent

$$f''(x_i) = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} \qquad < \mathbf{0.5\ pt} >$$

Ce qui nous donne $f''(x = 1) \approx -0.3248$, $f''(x = 1.25) \approx -0.3248$, $f''(x = 1.50) \approx -0.2256$, $f''(x = 1.75) \approx -0.1664$, $f''(x = 2.00) \approx -0.1664$. **<1.5 pts>**

On prend la valeur max en valeur absolue, i.e., $f''(x = 1.25) \approx 0.3248$, et la borne supérieure s'écrit

$$\begin{aligned} |E| &\lessapprox \frac{(0.25)^2}{12} \times (2-1) \times 0.3248 \qquad < \mathbf{1\ pt} > \\ |E| &\lessapprox 0.0016916 \end{aligned}$$

$|E| < 0.00169 < 0.005 = 0.5 \times 10^{-2}$ donc deux chiffres sont significatifs après la virgule pour l'estimation de $\hat{I}_{1,4}$. On a donc $I \approx 0.\underline{19}18$ **<1 pt>**

Nota : En utilisant la connaissance analytique de $f(x)$, on a $f''(x) = -1/2x^2$ qui sur l'intervalle $[1,2]$ nous donne $|f''(x)| < 0.5$ puis la borne supérieure de l'erreur d'estimation de $\hat{I}_{1,4}$ suivante $|E| < \frac{(0.25)^2}{12} \times (2-1) \times 0.5 = 0.002604$ (qui nous permettrait aussi de dire que deux chiffres sont significatifs après la virgule dans le calcul de $\hat{I}_{1,4}$).

$\boxed{\mathbf{2.}}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{t+3}{2}$, pour lequel $dx = \frac{1}{2}\,dt$, **<1 pt>**
nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln\sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ln\sqrt{\frac{t+3}{2}}\,dt \qquad <\mathbf{2\ pts}> \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}/3+3}{2}} + \ln\sqrt{\frac{-\sqrt{3}/3+3}{2}}\right) \qquad <\mathbf{1\ pt}> \\ &\approx \frac{1}{2}(0.2907375987 + 0.09585734539) \\ &\approx 0.1932974 \qquad <\mathbf{2\ pts}> \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3.}}$

$$\begin{aligned}
J &= \int_1^2 \ln\sqrt{x}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2\,y\ln y\;dy \qquad \textbf{<1 pts>}\\
&= \left[y^2\ln(y)\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} y\,dy\\
&= \ln 2 - [\frac{y^2}{2}]_1^{\sqrt{2}}\\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}\\
&\approx 0.1931471806 \qquad \textbf{<4 pts>}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{4.}}$

1ère méthode

Trois paramètres à déterminer comme les trois paramètres d'un polynôme de degré deux que cette méthode intégrera parfaitement

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} K_1x^2 + K_2x^+K_3\,dx &= w_1\left[K_1 - K_2 + K_3\right] + w_2\left[K_1x_2^2 + K_2x_2 + K_3\right]\\
K_1[\frac{2}{3}] + K_2[0] + K_3[2] &= K_1\left[w_1 + w_2x_2^2\right] + K_2\left[-w_1 + w_2x_2\right] + K_3\left[w_1 + w_2\right]
\end{aligned}$$

Soit le système obtenu après identification

$$\begin{cases} w_1 + w_2x_2^2 = \frac{2}{3}\\ -w_1 + w_2x_2 = 0\\ w_1 + w_2 = 2 \end{cases}$$

2ème méthode (Mais qui est en faite la même !)

Trois paramètres à déterminer donc trois relations à trouver. La première est trouvée en disant que cette relation doit intégrer parfaitement tout polynôme de base de degré 0. On obtient donc $\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2 = w_1 f(-1) + w_2 f(t_2) = w_1 \times 1 + w_2 \times 1 = w_1 + w_2$. La deuxième relation est trouvée en disant que cette relation doit intégrer parfaitement tout polynôme de base de degré 1. On obtient donc $\int_{-1}^{1} x\,dx = [\frac{x^2}{2}]_{-1}^{1} = 0 = w_1 f(-1) + w_2 f(t_2) = w_1 \times -1 + w_2x_2 = -w_1 + w_2x_2$. Idem pour la troisième relation mais avec le polynôme de base de degré 2. On obtient donc $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = w_1 f(-1) + w_2 f(t_2) = w_1 \times 1 + w_2x_2^2 = w_1 + w_2x_2^2$.

<4 pts>

On vérifie que $w_1 = 1/2$, $w_2 = 3/2$ et $x_2 = 1/3$ est bien solution de ce système.

<1 pts>

Pour savoir si cette méthode numérique intègre parfaitement tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois. on vérifie si la relation trouvée intègre aussi parfaitement tout polynôme de base de degré 3. On obtient donc $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = [\frac{x^4}{4}]_{-1}^{1} = 0 = w_1 f(-1) + w_2 f(t_2) = -w_1 + w_2x_2^3$ qui pour les paramètres $w_1 = 1/2$, $w_2 = 3/2$ et $x_2 = 1/3$ n'est pas vraie.

<2 pts>

$\boxed{\textbf{5.}}$

La plus précise serait la méthode de Romberg appliquée sur trois étapes avec un terme d'erreur en $O(h^6)$ (on obtiendrait une précision de $O(h^4)$ pour la deuxième étape et on gagnerait deux ordre pour chaque

étape).
<2 pts>

Ensuite la méthode de Simpson 1/3 composite combiné avec l'extrapolation de Richardson pour un terme d'erreur en $O(h^5)$ (on gagnerait un ordre par rapport à la méthode de Simpson 1/3 composite).
<2 pts>

Ensuite la troisième serait la méthode de Simpson 1/3 composite en $O(h^4)$.
<2 pts>

III. Résolution d'Équation Différentielle (21 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante,

$$y'(t) = f(t, y(t)) = -\exp(t)\, y^2(t) \tag{3}$$

avec la condition initiale $y(t = 0) = 1$.

(a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$, $y(0.4)$ et $y(0.6)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins quatre décimales).
<5 pts>

(b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
<4 pts>

(c) On voudrait maintenant améliorer $y(0.2)$ avec une stratégie itérative utilisant son estimée obtenue à la question précédente et une stratégie du type "Méthode de Newton". 1) Dire comment cela est possible, 2) trouver cette relation itérative 3) proposer donc un raffinement numérique de $y(0.2)$ qui utiliserait cette stratégie.
<7 pts>

2. Estimer l'expression analytique de $y(t)$ pour respectivement les conditions initiales $y(t = 0) = 1$.
<5 pts>.

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 1.0$,

$$y_{n+1} = y_n - h\Big(\exp(t_n)\, y_n^2\Big) \qquad < \mathbf{1\ \ pt} >$$

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	1.000000000
1	0.2	0.800000000
2	0.4	0.643660447
3	0.6	0.520048219

<4 pts>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n - h\Big(\exp(t_n)\; y_n^2)\Big)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	-	1.000
1	0.2	0.800000000	0.8218302235
2	0.4	0.656841938	0.6749725974

<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

Avec la condition initiale $y_0 = 1$ et $h = 0.2$, la relation de *correction* de la question précédente (Question 1(b)) s'écrit pour $y_1 = y(t = 0.2)$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(-\exp(t_0)\; y_0^2 - \exp(t_1)\; \tilde{y}_1^2) \\ y_1 &= 1 + 0.1(-1 - \exp(0.2)\; \tilde{y}_1^2) = 0.9 - 0.1221402758\; \tilde{y}_1^2 \end{aligned}$$

avec $\tilde{y}_1 = 0.8$ (valeur donnée par la relation de *prédiction* de la méthode d'Euler simple). On peut donc appliquer plusieurs fois la correction en trouvant y_1 solution de l'équation $g(y_1) = 0.1221402758\, y_1^2 + y_1 - 0.9 = 0$ qui peut être résolu itérativement en partant de $y_1^{[0]} = 0.8218$ et en itérant la relation (de Newton) suivante

$$y_1^{[n+1]} = y_1^{[n]} - \frac{g(y_1^{[n]})}{g'(y_1^{[n]})} = y_1^{[n]} - \frac{0.1221402758\; y_1^2 + y_1 - 0.9}{0.2442805516\; y_1 + 1}$$

<**5 pts**>

En itérant une fois cette relation on trouve $y_1^{[1]} \approx 0.8182288352$. <**2 pts**>

Nota : On trouve ensuite $y_1^{[2]} = 0.818227537$, $y_1^{[3]} = 0.818227537$, ce qui montre qu'on ne peux plus améliorer le résultat avec cette méthode. Pour plus d'amélioration il serait donc plus avantageux de recommencer avec un pas h plus petit.

$\boxed{\textbf{2}}$

On a

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -\exp(t)$$

En intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y(t)} &= -\exp(t) + Cst \\ y(t) &= \frac{1}{\exp(t) + Cst} \end{aligned}$$

Et avec la prise en compte de la condition initiale, on trouve $y(t) = \exp(-t)$. <**5 pts**>

Nota : Par calcul analytique, on trouve donc, pour la condition initiale $y(t{=}0) = 1.0$,
$y_1 = y(t{=}0.2) = 0.8187307531$, $y_2 = y(t{=}0.4) = 0.670320046$ et $y_3 = y(t{=}0.6) = 0.5488116361$.

IV. Système d'Équations Différentielles (11 pts)

Le mathématicien et physicien anglais Lord John William Strutt Rayleigh $(1842 - 1919)$, connu entre autre, pour sa recherche dans le domaine des phénomènes ondulatoires, introduisit une équation différentielle de la forme

$$m\, x''(t) + k\, x(t) \quad = \quad a\, x'(t) - b\, \big(x'(t)\big)^3$$

pour modéliser les oscillations (ou vibrations) d'une anche de clarinette. Dans cette équation, m, k, a, b sont des constantes connues et les conditions initiales sont $x(0) = 0.0$ et $x'(0) = 1.0$. On vous demande de

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser quelle serait le système de relations itératives qui serait obtenu. On utilisera $k = a = b = 1$ et $m = 2$.
   <4 pts>
3. Trouver $x(t = 0.2)$ et $x(t = 0.4)$.
   <3 pts>

Réponse

1.

En posant, $x'(t) = y(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & \frac{1}{m}\Big(-k\, x(t) + a\, y(t) - b\, y^3(t)\Big) \end{array} \right. \qquad < \textbf{3pts} >$$

avec les conditions initiales $x(0.0) = 0.0$ et $y(0.0) = 1.0$. **<1 pt>**

2.

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, y(t_n) \\ y(t_{n+1}) & = & y(t_n) + \frac{h}{2}\Big(-x(t_n) + y(t_n) - y^3(t_n)\Big) \end{array} \right. \qquad < \textbf{4 pts} >$$

Nota : On peut utiliser ce schéma itératif pour résoudre le problème. Néanmoins, on peut utiliser aussi la valeur de x ou y la plus récente pour facilement optimiser les résultats. Dans ce cas on se retrouve avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, y(t_n) \\ y(t_{n+1}) & = & y(t_n) + \frac{h}{2}\Big(-x(t_{n+1}) + y(t_n) - y^3(t_n)\Big) \end{array} \right.$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y(t_{n+1}) & = & y(t_n) + \frac{h}{2}\Big(-x(t_n) + y(t_n) - y^3(t_n)\Big) \\ x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, y(t_{n+1}) \end{array} \right.$$

$\boxed{\textbf{3.}}$

En partant des conditions initiales $x(0.0) = 0.0$ et $y(0.0) = 1.0$, on obtient immédiatement pour $h = 0.2$

$$\begin{cases} x(0.2) &= 0.0 + 0.2 \times 1.0 = 0.2 \\ y(0.2) &= 1.0 + 0.1 \times \Big(0.0 + 1.0 - (1.0)^3\Big) = 1.0 \end{cases}$$

<1.5 pts>

$$\begin{cases} x(0.4) &= 0.2 + 0.2 \times 1.0 = 0.4 \\ y(0.4) &= 1.0 + 0.1 \times \Big(0.2 + 1.0 - (1.0)^3\Big) = 1.02 \end{cases}$$

<1.5 pts>

Nota : Pour un jeu de paramètres m, k, a, b et conditions initiales appropriées, on pourrait trouver la courbe suivante illustrant la vibration de la manche de clarinette en fonction du temps t.