DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *16/04/2008*

I	Moindres Carrés (39 pts)
II	Dérivation Numérique (24 pts)
III	Intégration Numérique (26 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (20 pts)
V	Système d'Équations Différentielles (5 pts)
Total	114 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (39 pts)

Vous possédez un échantillon formé d'un certain nombre de composés non radioactifs et de deux composés radioactifs pour lesquels on connaît précisément leur période respectif de demi-vies [que l'on appellera dans la suite $\tau_a = 1$ (en jour) pour le composé radioactif A et $\tau_b = 2$ (en jours) pour le composé radioactif B]. On vous demande de déterminer, au sens des moindres carrés, la composition à l'instant t (i.e., le nombre d'atomes restant à l'instant t dans l'échantillon) des deux composés radioactifs constituant l'échantillon.

• Pour résoudre ce problème, on dispose de la loi physique donnant le nombre de désintégrations par seconde (y) donné par l'échantillon à l'instant t dont l'expression est

$$\begin{aligned} y\,(t) &= N_a\,2^{-\frac{t}{\tau_a}} + N_b\,2^{-\frac{t}{\tau_b}} \\ &= N_a\,2^{-t} + N_b\,2^{-\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

où N_a et N_b représente respectivement le nombre initial d'atomes du composé radioactif A et B.

• On dispose aussi du nombre de désintégrations par seconde dans l'échantillon (obtenu par un compteur Geiger) au cours du temps

Temps (jours)	t_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
Nb désintégrations / seconde ($\times 10^9$)	$y_i = y(t_i)$	15	8.5	5.1	3.0	1.8

———————

1. (a) Donner l'expression $R(N_a, N_b)$, appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients N_a et N_b et des N données expérimentales t_i,$y_i = y(t_i)$) qui serait minimisé par cette méthode des moindres carrés.
   <3 pts>

   (b) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients N_a et N_b au sens des moindres carrés de cette loi (i.e., le système d'équations qui permettra ensuite de trouver les coefficients N_a et N_b au sens des moindres carrés).
   <9 pts>

   (c) Résoudre ce système d'équations.
   On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel certaines/toutes de ses égalités vous permettront de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question.
   <8 pts>

$\sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2\,t_i}{\tau_a}} = 1.332$	$\sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2\,t_i}{\tau_b}} = 1.938$	$\sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}-\frac{t_i}{\tau_a}} = 1.538$
$\sum_{i=1}^{N} y_i\,2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} = 21.01$	$\sum_{i=1}^{N} y_i\,2^{-\frac{t_i}{\tau_b}} = 25.07$	

———————

2. (a) On va maintenant tenter de résoudre ce problème d'ajustement de courbe au sens des moindres carrées en identifiant la solution de notre problème (i.e., le vecteur solution $x = (N_a \;\; N_b)^t$) comme étant la solution d'un système sur-dimensionné d'équations linéaires $\mathbf{A}\,x = b$ dont les coefficients (de b) sont entachés de bruit.
   Dans ce but, trouver la matrice $\mathbf{A}$, associé à un système surdéterminé d'équations tel que

$$\mathbf{A}\,\underbrace{\begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{b}$$

<4 pts>

(b) Exprimer le vecteur solution $x = (N_a \;\; N_b)^t$, en l'écrivant sous la forme

$$x \;=\; \mathbf{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

dans laquelle $\mathbf{B}$ est une matrice que l'on exprimera en fonction de A.
<4 pts>

(c) Devrait on trouver la même solution (i.e. le même $x = (N_a \;\; N_b)^t$?) que celui trouvée à la question 1.(c) par cette méthode ? Justifiez.
<2 pts>

———

3. (a) Si pour ce problème, on connaissait N_a et N_b mais on voulait chercher au sens des moindres carrés τ_a et τ_b (qui serait donc inconnu). Dans ce cas, notre résidu à minimiser serait fonction de ces deux paramètres et s'écrirait $R(\tau_a, \tau_b)$.
Est-ce que l'application des étapes données par les questions 1.(a) et 1.(b) nous permettrait d'avoir un système d'équations linéaires ? Justifiez.
<3 pts>

(b) Sans donner ni résoudre ce système d'équations, dire quel(s) type(s) de méthode(s) numérique(s) permettrait de le résoudre.
<3 pts>

(c) Dans le cas où τ_a et τ_b serait inconnu. Pourrait-on identifier comme dans la question 2(a), la solution de notre problème (i.e., le vecteur solution $x = (\tau_a \;\; \tau_b)^t$) comme étant la solution d'un système sur-dimensionné d'équations $\mathbf{A}\, x = b$ dont les coefficients (de b) sont entachés de bruit ?
<3 pts>

Réponse

1(a)

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est

$$R(N_a, N_b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - N_a\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} \;-\; N_b\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}} \Big)^2 \qquad < \textbf{3 pts} >$$

1(b)

Trouver les coefficients N_a et N_b au sens des moindres carrés, c'est trouver N_a et N_b pour que $R(N_a, N_b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(N_a,N_b)}{\partial N_a} = 0$ et $\frac{\partial R(N_a,N_b)}{\partial N_b} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre N_a donne :

$$\frac{\partial R(N_a, N_b)}{\partial N_a} \;=\; -2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - N_a\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} \;-\; N_b\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}} \Big)\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}}$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(N_a,N_b)}{\partial N_a} = 0$ est donc

$$\sum_{i=1}^{N} y_i\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} \;-\; N_a \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2t_i}{\tau_a}} \;-\; N_b \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{t_i}{\tau_a} - \frac{t_i}{\tau_b}} \;=\; 0$$

La dérivation par rapport au paramètre N_b donne

$$\frac{\partial R(N_a,N_b)}{\partial N_b} \quad = \quad -2\sum_{i=1}^{N}\Big(y_i - N_a\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} \,-\, N_b\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}}\Big)\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}}$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(N_a,N_b)}{\partial N_b} = 0$ est donc

$$\sum_{i=1}^{N} y_i\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}} \;-\, N_a \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}-\frac{t_i}{\tau_b}} \;-\, N_b \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2t_i}{\tau_b}} \;=0$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_a \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2t_i}{\tau_a}} \;+ N_b \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}-\frac{t_i}{\tau_b}} & = & \sum_{i=1}^{N} y_i\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}} \\ N_a \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{t_i}{\tau_a}-\frac{t_i}{\tau_b}} \;+ N_b \sum_{i=1}^{N} 2^{-\frac{2t_i}{\tau_b}} & = & \sum_{i=1}^{N} y_i\, 2^{-\frac{t_i}{\tau_b}} \end{array}\right.$$

<9 pts>

Nota : 2ème méthode

En faisant le changement de variable $x_i = 2^{-\frac{t_i}{2}}$, on obtient la loi physique suivante $y(x) = N_b\, x + N_a\, x^2$ qui est un polynome d'ordre deux de la forme $P_2(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2$ avec $a_0 = 0$, $a_1 = N_b$ et $a_2 = N_a$. Les équations normales se trouvent donc directement en regardant le slide 87 du chapitre 4 (interpolation polynomiale : Moindres carrés) des notes de cours ....

1(c)

On a un système de deux équations linéaires à résoudre, en utilisant le tableau données à l'énoncé, ce système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1.332N_a + 1.538N_b & = & 21.01 \\ 1.538N_a + 1.938N_b & = & 25.07 \end{array}\right.$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1.332 & 1.538 \\ 1.538 & 1.938 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.01 \\ 25.07 \end{pmatrix} \qquad <\textbf{4 pts}>$$

puis par une opération élémentaire

$$\begin{pmatrix} 1.332 & 1.538 \\ 0 & 0.1621 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.01 \\ 0.8107 \end{pmatrix}$$

et enfin, par substitution arrière, on trouve $N_b \approx 5$ et $N_a \approx 10$, pour une loi de la forme

$$y\,(t) = 10 \times 2^{-t} \,+\, 5 \times 2^{-\frac{t}{2}}$$

<4 pts>

2(a)

On a facilement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2^{-\frac{t_1}{\tau_a}} & 2^{-\frac{t_1}{\tau_b}} \\ 2^{-\frac{t_2}{\tau_a}} & 2^{-\frac{t_2}{\tau_b}} \\ \vdots & \\ 2^{-\frac{t_N}{\tau_a}} & 2^{-\frac{t_N}{\tau_b}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad < \textbf{4 pts} >$$

2(b)

On résout ce système sur-dimensionné par la méthode de la pseudo-inverse vue en cours et on obtient

$$\begin{pmatrix} N_a \\ N_b \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad < \textbf{4 pts} >$$

2(c)

Oui puisqu'on minimise dans les deux cas le même résidu d'erreur.
<**2 pts**>

3(a)

Trouver les coefficients τ_a et τ_b au sens des moindres carrés, c'est trouver τ_a et τ_b pour que $R(\tau_a, \tau_b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(\tau_a,\tau_b)}{\partial \tau_a} = 0$ et $\frac{\partial R(\tau_a,\tau_b)}{\partial \tau_b} = 0$. Ces dérivés partielles nous donneraient un système de deux équations non linéaires à résoudre.
<**3 pts**>

3(b)

On aurait un système de deux équations non linéaires à résoudre, on pourrait utiliser la méthode de Newton (-Raphson) ou la méthode des points fixes (type Jacobi ou Gauss Seidel) pour le résoudre.
<**3 pts**>

3(c)

Non car les N équations qui en résulterait ne sont pas linéaires en τ_a et τ_b.
<**3 pts**>

II. Dérivation Numérique (24 pts)

Une voiture de course accélère à partir d'un stop pendant que le passager enregistre la vitesse $v(t)$ du véhicule (en ms^{-1}) toute les secondes. Ces données sont résumées dans le tableau suivant

t	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
$v(t)$	0.00	3.61	7.22	10.10	12.50	14.62	16.60	18.06	19.54

1. Utiliser une formule de différence centrée d'ordre $O(h^2)$ pour approximer numériquement l'accélération $a(t)$ du véhicule à l'instant $t = 2$ seconde $a(t = 2) = v'(t = 2)$.
<**5 pts**>

2. Utiliser maintenant autant de fois que possible l'extrapolation de Richardson pour améliorer cette dernière estimation. Indiquer l'ordre ainsi qu'une approximation de l'erreur d'estimation commise.
   <**13 pts**>
3. Sans le calculer, quelle aurait été le nombre de fois (autant de fois que possible) que l'on aurait pu utiliser l'extrapolation de Richardson et la précision de l'estimation de l' accélération obtenue si on avait utiliser la formule de dérivée numérique non centrée classique $[v(t_5) - v(t_4)]/(t_5 - t_4)$ au lieu de la formule centrée utilisée à la question 1. Justifiez.
   <**6 pts**>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$a(t=4) = v'(t=2) = \frac{v(t=2.5) - v(t=1.5)}{2 \times 0.5} = \frac{14.62 - 10.10}{1} = 4.52 \ \ (+O(h^2))$$ <**5 pts**>

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$\text{Pour 2h} \ \blacktriangleright \ v'(t=4) = \frac{v(6.00) - v(2.00)}{2 \times 1.0} = \frac{16.60 - 7.22}{2.0} = 4.6900 \ + O(4h^2)$$ <**2.5 pts**>

$$\text{Pour 4h} \ \blacktriangleright \ v'(t=4) = \frac{v(8.00) - v(0.00)}{2 \times 2.0} = \frac{19.54 - 0.00}{4.0} = 4.8860 \ + O(16h^2))$$ <**2.5 pts**>

Ensuite, on utilise l'extrapolation de Richardson, avec les formules,
$v'_{1-\mathrm{R},[h]} = v'_{[h]} + \frac{1}{2^2-1}\{v'_{[h]} - v'_{[2h]}\}$ puis $v'_{1-\mathrm{R},[2h]} = v'_{[2h]} + \frac{1}{2^2-1}\{v'_{[2h]} - v'_{[4h]}\}$, <**1 pt**>
$v'_{2-\mathrm{R}} = v'_{1-\mathrm{R},[h]} + \frac{1}{2^4-1}\{v'_{1-\mathrm{R},[h]} - v'_{1-\mathrm{R},[2h]}\}$ <**1 pt**>

Pas	$v'(x)$		$v'_{1-\mathrm{R}}(x)$		$v'_{2-\mathrm{R}}(x)$	
4h=2.00	4.8860	$+O(16h^2)$				
2h=1.00	4.6900	$+O(4h^2)$	4.6240	$+O(16h^4)$		
h=0.50	4.5200	$+O(h^2)$	4.4640	$+O(h^4)$	4.454	$+O(h^6)$
				<**3 pts**>	<**3 pts**>	

Le terme d'erreur de la formule de dérivation numérique centrée est en $O(h^2) = ah^2 + bh^4 + ch^6$... (cf. cours), cela explique pourquoi on va gagner deux ordres de grandeur pour chaque extrapolation.

Nota : On obtient donc une estimation de cette accélération avec une précision de l'ordre de $0.5^6 \approx 0.0156$, cad une estimée à deux centième près.

$\boxed{\mathbf{3}}$

On aurait pu appliquer autant de fois la méthode d'extrapolation de Richardson, i.e., deux fois. Cependant la formule de dérivé de départ aurait eu une précision en $O(h)$. Pour la première extrapolation, on aurait eu une précision en $O(h^2)$. La précision de l'estimation finale aurait été en $O(h^3)$ car la formule de dérivation considéré ici a un terme d'erreur en $O(h) = ah + bh^2 + ch^3 + dh^4 + ...$

<**6 pts**>

III. Intégration Numérique (26 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{4.5}}{x+1}\,dx. \tag{1}$$

1. **Méthode des trapèzes**
   - (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des trapèzes (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
     <**5 pts**>

2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**
   On rappelle que cette méthode dit que

   $$I_Q = f\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

   est une approximation de l'intégrale suivante

   $$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

   - (a) Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I.
     <**5 pts**>

3. **Méthode hybride analytique itérative/numérique**
   Soit $I(n)$, l'intégrale

   $$I(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$$

   Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(4.5) = \int_0^1 \frac{x^{4.5}}{x+1}\,dx$.
   On se propose de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative.
   - (a) Montrer que nous avons la relation $I(n) = \frac{1}{n} - I(n-1)$.
     <**4 pts**>
   - (b) Calculer $I(0) = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ analytiquement.
     <**2 pts**>
   - (c) En déduire $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$ puis finalement $I(5)$ grâce à la relation donnée en 3(a).
     <**4 pts**>
   - (d) Trouver le polynôme de collocation d'ordre 2 qui permet d'interpoler la valeur de $I(4.5)$, en déduire $I(4.5)$.
     <**6 pts**>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

On obtient, par la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned}
I_{1,4} &= (1/8)\Big(f(0) + 2f(1/4) + 2f(1/2) + 2f(3/4) + f(1)\Big) \qquad < \textbf{3 pts} > \\
I_{1,4} &= (1/8)\Big(0 + 0.003125 + 0.058926 + 0.313160 + 0.50\Big) \\
I_{1,4} &\approx 0.10940 \qquad < \textbf{2 pts} >
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, <**1 pt**>, nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^{4.5}}{x+1}\,dx \\ &= \frac{2^{-3.5}}{2}\int_{-1}^1 \frac{(t+1)^{4.5}}{t+3}\,dt \qquad < \textbf{1.5 pts} > \\ &= \frac{2^{-3.5}}{2}\left(\frac{((-\sqrt{3}/3)+1)^{4.5}}{(-\sqrt{3}/3)+3} + \frac{((\sqrt{3}/3)+1)^{4.5}}{(\sqrt{3}/3)+3}\right) \qquad < \textbf{1.5 pts} > \\ &\approx \frac{2^{-3.5}}{2}(0.008563 + 2.17327) \\ &\approx 0.0964_{243} \qquad < \textbf{1 pt} > \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3(a)}}$

$$\begin{aligned} I(n) &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1-1)}{x+1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - I(n-1) = \frac{1}{n}[x^n]_0^1 - I(n-1) \\ &= \frac{1}{n} - I(n-1) \qquad < \textbf{4 pts} > \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3(b)}}$

$$I(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \ln 2 \qquad < \textbf{2 pts} >$$

$\boxed{\mathbf{3(c)}}$

$$I(1) = 1 - \ln 2 \approx 0.3068$$

$$I(2) = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0.1931 \qquad < \textbf{1 pt} >$$

$$I(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{5}{6} - \ln 2 \approx 0.14018 \qquad < \textbf{1 pt} >$$

$$I(4) = \frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \ln 2 = \frac{-7}{12} + \ln 2 \approx 0.109813 \qquad < \textbf{1 pt} >$$

$$I(5) = \frac{1}{5} + \frac{7}{12} - \ln 2 = \frac{47}{60} - \ln 2 \approx 0.090186 \qquad < \textbf{1 pt} >$$

$\boxed{\mathbf{3(d)}}$

On a donc

n	3	4	5
$I(n)$	0.14018	0.10981	0.09018

$$\begin{aligned} P_2 = I_2(n) &= \frac{(x-4)(x-5)}{(3-4)(3-5)} \times 0.14018 + \frac{(x-3)(x-5)}{(4-3)(4-5)} \times 0.10981 + \frac{(x-3)(x-4)}{(5-3)(5-4)} \times 0.09018 \\ &= (x-4)(x-5) \times 0.07009 - (x-3)(x-5) \times 0.10981 + (x-3)(x-4) \times 0.04509 \end{aligned}$$

<**4 pts**>

$$I_2(4.5) = 0.0986_{5692367\ldots} \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Nota : En utilisant sur mon ordinateur la méthode des Trapèzes avec 10 millions de points (en *doubles*) sur l'intervalle [0 1], on arrive a une estimation de $I = 0.0990449930$.

IV. Résolution d'Équation Différentielle (20 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\, y(t) \tag{2}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 1) = \exp(1) \approx 2.7183$.

   (a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(1.2)$ et $y_2 = y(1.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins quatre décimales).
   <**5 pts**>

   (b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(1.2)$ et $y(1.4)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
   <**5 pts**>

   (c) Donner le système d'équations que l'on devrait résoudre pour obtenir $y(1.2)$ et $y(1.4)$ par la méthode des différences finies si on utilisait une approximation numérique d'ordre 1 pour approximer $y'(t)$. Donner le nom d'une méthode itérative de résolution d'équation différentielles qui serait aussi précise que cette méthode directe.
   <**5 pts**>

2. Estimer l'expression analytique de $y(t)$ pour respectivement les conditions initiales $y(t = 1) = \exp(1)$.
   <**5 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 2.71828$

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\frac{1}{2\sqrt{t_n}}\, y_n\Big) \qquad < \textbf{1 pt} >$$

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	1.0	2.7182
1	1.2	2.9901
2	1.4	3.2630

<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{t_n}}\, y_n\right)}_{f(t_n,y_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	1.0	-	2.7182
1	1.2	2.9901	2.9903
2	1.4	3.2633	3.2647

<**5 pts**>

1(c)

En utilisant une formule numérique d'ordre 1 pour approximer $y'(t)$, cad

$$y'(t_j) = \frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{h} + O(h),$$

une discrétisation du temps du style $t_n = t_0 + nh$ avec $h = 0.2$ (et une condition initiale $y_0 = y(t_1) = \exp(1)$ donnée), on obtient le système de deux équations à deux inconnus suivant

$$\begin{cases} y_1 - y_0 &= h\,\frac{1}{2}\,y_0 \\ y_2 - y_1 &= h\,\frac{1}{2\sqrt{1.2}}\,y_1 \end{cases}$$

<**4 pts**>

Cette méthode directe aurait une erreur (directe) sur l'estimation de y_1 et y_2 en $O(h)$ soit la même précision que la méthode d'Euler ou que la méthode des séries de Taylor utilisnt un terme. <**1 pt**>

2

On a

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

En intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \ln|y(t)| &= \sqrt{t} + Cst \\ y(t) &\propto \exp(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Et avec la prise en compte de la condition initiale, on trouve $y(t) = \exp(\sqrt{t})$. <**5 pts**>

Nota : Par calcul analytique, on trouve donc, pour la condition initiale $y(t{=}1) = \exp(1)$, $y_1 = y(t{=}1.2) = 2.9905$ et $y_2 = y(t{=}0.4) = 3.26486$.

V. Système d'Équations Différentielles (5 pts)

Un pendule constitué d'une tige fine et rigide dont on a fixé à son extrémité une masse est soumise à une force d'amplitude A et de fréquence w (grâce à un moteur qui fournit cette force à l'autre extrémité de la tige). L'équation différentielle qui donne l'angle θ de ce pendule est donnée par l'équation différentielle suivante

$$\theta''(t) \quad = \quad -D\,\theta'(t) - \frac{G}{L}\sin(\theta(t)) + A\sin(wt)$$

Dans cette équation, D, G, L, w sont des constantes connues et les conditions initiales sont $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$. On vous demande de

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En posant, $\theta'(t) = x(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \theta'(t) &= x(t) \\ x'(t) &= -D\,x(t) - \frac{G}{L}\sin(\theta(t)) + A\sin(wt) \end{cases} \qquad < \textbf{4 pts} >$$

avec les conditions initiales $x(0) = \theta'(0)$ et $\theta(0) = \theta_0$. **<1 pt>**

Nota : Evolution de $\theta(t)$ a travers le temps pour différentes amplitudes de forces A.