DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *29/04/2009*

I	Moindres Carrés (43 pts)
II	Dérivation Numérique (8 pts)
III	Intégration Numérique (29 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (32 pts)
Total	112 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (43 pts)

Il n'est pas rare qu'en Chimie Physique, on ait à ajuster plusieurs relations de façon conjointe sur plusieurs ensemble de données.

Plus précisement, il est intéressant quelquefois d'ajuster simultanément plusieurs droites que l'on veut voir partager la même ordonnée à l'origine. Si les données sont bruitées, il y a peu de chance de voir la contrainte *partager la même ordonnée à l'origine* (pour ces deux droites) vérifiée spontanément par les données. Par contre cette contrainte peut être facilement imposer au sens des *moindres carrés* comme nous le verrons dans cet exercice.

On dispose donc de deux ensembles de données, notés respectivement

1. $(y_{1,i}\ ;\ t_{1,i})_{i=1,\ldots,N_1}$
2. $(y_{2,i}\ ;\ t_{2,i})_{i=1,\ldots,N_2}$

de longueur $N_1 = 5$ et $N_2 = 4$, et résumé dans les deux tableaux ci dessous

$t_{1,i}$	1	2	3	4	5
$y_{1,i} = y_1(t_{1,i})$	3.6	5.8	7.3	9.7	10.9

$t_{2,i}$	1.5	3.5	5.5	7.5
$y_{2,i} = y_2(t_{2,i})$	3.3	6.7	6.9	7

On sait que ces deux jeux de donnés doivent se distribuer selon deux droites ayant la même ordonnée à l'origine. C'est à dire que l'on doit ajuster les deux relations suivantes

$$y_{1,i} = a + b_1\, t_{1,i} \quad \text{et} \quad y_{2,i} = a + b_2\, t_{2,i}$$

qui dépendent donc de trois paramètres, i.e., le paramètre a qui est l'ordonnée à l'origine commune de ces deux droites et les paramètres b_1 et b_2 respectivement les pentes de la première et deuxième droite. Une façon d'estimer, au sens des moindres carrés, ces trois paramètres est de considérer le résidu ou écart quadratique suivant

$$R(a, b_1, b_2) = \sum_{i=1}^{N_1} \Big(y_{1,i} - \big(a + b_1\, t_{1,i}\big) \Big)^2 + \sum_{i=1}^{N_2} \Big(y_{2,i} - \big(a + b_2\, t_{2,i}\big) \Big)^2 \tag{1}$$

qui devra être minimisé par cette méthode des moindres carrés.

—————

1. (a) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a, b_1, b_2 qui minimisent l'Eq. (1) par la méthode algébrique (i.e., la méthode utilisant les dérivés).
<12 pts>

   (b) Résoudre le système d'équations donné par les équations normales précédentes.
On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel certaines/toutes de ses égalités vous permettront de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question.
<8 pts>

$N_1 + N_2 = 9$	$\sum_{i=1}^{N_1=5} t_{1,i} = 15$	$\sum_{i=1}^{N_2=4} t_{2,i} = 18$
$\sum_{i=1}^{N_1=5} t_{1,i}^2 = 55$	$\sum_{i=1}^{N_2=4} t_{2,i}^2 = 101$	$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{N_k} y_{k,i} = 61.2$
$\sum_{i=1}^{N_1=5} t_{1,i}\, y_{1,i} = 130.4$	$\sum_{i=1}^{N_2=4} t_{2,i}\, y_{2,i} = 118.85$	

---

2. (a) On va maintenant tenter de résoudre ce problème d'ajustement de courbe au sens des moindres carrées en identifiant la solution de notre problème (i.e., le vecteur solution $x = (a \quad b_1 \quad b_2)^t$) comme étant la solution d'un système sur-dimensionné d'équations linéaires $\mathbf{A}\,x = \mathbf{b}$ dont les coefficients (de $\mathbf{b}$) sont entachés de bruit.
Dans ce but, trouver la matrice $\mathbf{A}$, associée à un système surdéterminé d'équations tel que

$$\mathbf{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 = y_{1,1} \\ y_2 = y_{1,2} \\ \vdots \\ y_6 = y_{2,1} \\ y_7 = y_{2,2} \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{b}$$

où $N = N_1 + N_2 = 9$.
<**5 pts**>

(b) Exprimer le vecteur solution $x = (a \;\; b_1 \;\; b_2)^t$, en l'écrivant sous la forme

$$x = \mathbf{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

dans laquelle $\mathbf{B}$ est une matrice que l'on exprimera en fonction de $\mathbf{A}$.
<**5 pts**>

(c) Expliquer comment on peut retrouver les équations normales par cette méthode.
<**4 pts**>

(d) Devrait on trouver la même solution (i.e., le même $x = (a \quad b_1 \quad b_2)^t$?) que celui trouvée à la question 1.b par cette méthode ? Justifier.
<**2 pts**>

---

3. (a) Quelle pourrait être la stratégie d'estimation des paramètres a, b_1, b_2 permettant d'exploiter le fait que l'on sait que le deuxième jeu de donnée $(y_{2,i}\ ;\ t_{2,i})_{i=1,\dots,N_2}$ était deux fois moins bruité que le premier ? (Dire qualitativement quelle pourrait être une stratégie sans calculer les coefficients a, b_1, b_2).
<**3 pts**>

(b) Quelle pourrait être une stratégie possible d'estimation des paramètres a, b_1, b_2 qui utiliserait les équations normales vues en cours (celles qui ajuste une droite sur un seul jeu de donné). Réfléchissez à une stratégie de type itérative, de type points fixe ou jacobi (expliquer celle-ci sans la faire).
<**4 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Trouver les coefficients a, b_1 et b_2 au sens des moindres carrés, c'est trouver ces paramètres pour que $R(a, b_1, b_2)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b_1,b_2)}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial R(a,b_1,b_2)}{\partial b_1} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b_1,b_2)}{\partial b_2} = 0$. L'équation normale obtenue par la dérivation par rapport au paramètre a donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(a,b_1,b_2)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N_1}\Big(y_{1,i}-(a+b_1\,t_{1,i})\Big) - 2\sum_{i=1}^{N_2}\Big(y_{2,i}-(a+b_2\,t_{2,i})\Big) &= 0\\ -a(N_1+N_2)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_k} y_{k,i} - b_1\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i} - b_2\sum_{i=1}^{N_2} t_{1,i} &= 0\end{aligned}$$

L'équation normale obtenue par la dérivation par rapport au paramètre b_1 donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(a,b_1,b_2)}{\partial b_1} = 2\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}\Big(y_{1,i}-(a+b_1\,t_{1,i})\Big) &= 0\\ \sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}\,y_{1,i} - a\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i} - b_1\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}^2 &= 0\end{aligned}$$

L'équation normale obtenue par la dérivation par rapport au paramètre b_2 donne

$$\sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i}\,y_{2,i} - a\sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i} - b_2\sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i}^2 = 0$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes

$$\left\{\begin{array}{r} a(N_1+N_2)+b_1\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}+b_2\sum_{i=1}^{N_2} t_{1,i} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{N_k} y_{k,i}\\ a\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}+b_1\sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}^2 = \sum_{i=1}^{N_1} t_{1,i}\,y_{1,i}\\ a\sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i}+b_2\sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i}^2 = \sum_{i=1}^{N_2} t_{2,i}\,y_{2,i}\end{array}\right.$$

<12 pts>

1(b)

En utilisant les informations données à l'énoncé, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{r} a(+9)+b_1(15)+b_2(18)=61.2\\ a(15)+b_1(55)=130.4\\ a(18)+b_2(101)=118.85\end{array}\right.$$

puis par deux opérations élémentaires ($R_2 = R_2 - \frac{15}{9}R_1$ et $R_3 = R_3 - \frac{18}{9}R_1$), on obtient

$$\left\{\begin{array}{r} a(+9)+b_1(+15)+b_2(+18)=61.2\\ a(0)+b_1(+30)+b_2(-30)=28.4\\ a(0)+b_1(-30)+b_2(+65)=-3.55\end{array}\right.$$

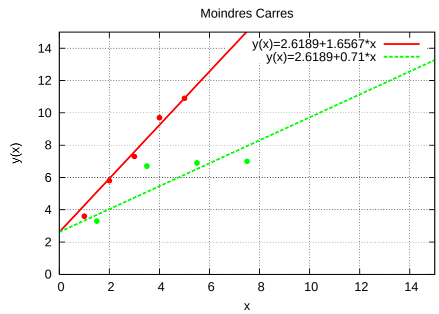
puis par l'opération élémentaires ($R_3 = R_3 + R_2$), on obtient

$$\left\{\begin{array}{r} a(+9)+b_1(+15)+b_2(+18)=61.2\\ a(0)+b_1(+30)+b_2(-30)=28.4\\ a(0)+b_1(0)+b_2(+35)=24.85\end{array}\right.$$

et par substitution arrière, $b_2 = 0.71$, $b_1 = 1.6567$ et $a = 2.6189$.

<8 pts>

Nota : graphiquement, on obtiendrait cela



2(a)

On a facilement

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_{1,1} & 0 \\ 1 & t_{1,2} & 0 \\ 1 & t_{1,3} & 0 \\ 1 & t_{1,4} & 0 \\ 1 & t_{1,5} & 0 \\ 1 & 0 & t_{2,1} \\ 1 & 0 & t_{2,2} \\ 1 & 0 & t_{2,3} \\ 1 & 0 & t_{2,4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 = y_{1,1} \\ y_2 = y_{1,2} \\ \vdots \\ y_6 = y_{2,1} \\ y_7 = y_{2,2} \\ \vdots \\ y_N = y_{2,4} \end{pmatrix}}_{b}$$

<5 pts>

2(b)

On résout ce système sur-dimensionné par la méthode de la pseudo-inverse vue en cours et on obtient

$$\begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad < \mathbf{5\ pts} >$$

2(c)

Par cette méthode, à partir de $\mathbf{A}x = b$, les équations normales se retrouvent en multipliant par $\mathbf{A}^t$ de part et d'autre de cette équation

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} y_1 = y_{1,1} \\ y_2 = y_{1,2} \\ \vdots \\ y_6 = y_{2,1} \\ y_7 = y_{2,2} \\ \vdots \\ y_N = y_{2,4} \end{pmatrix}$$

<4 pts>

2(d)

Oui puisqu'on minimise dans les deux cas le même résidu d'erreur.

<2 pts>

3(a)

Une stratégie serait de minimiser

$$R(a,b_1,b_2)=\sum_{i=1}^{N_1}\Big(y_{1,i}-\big(a+b_1\,t_{1,i}\big)\Big)^2+\mathbf{2}\times\sum_{i=1}^{N_2}\Big(y_{2,i}-\big(a+b_2\,t_{2,i}\big)\Big)^2 \qquad (2)$$

<3 pts>

Nota : Cette stratégie reviendrait en fait à dupliquer le deuxième jeu de donnée (on lui donne ainsi deux fois plus d'importance).

3(b)

Pour ajuster une droite $y=at+b$ sur un seul jeu de (N) donnés, on doit résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a\sum_{i=1}^N t_i^2+b\sum_{i=1}^N t_i & = & \sum_{i=1}^N t_i y_i \\ a\sum_{i=1}^N t_i+bN & = & \sum_{i=1}^N y_i \end{array}\right. \qquad (3)$$

On pourrait imaginer la stratégie itérative suivante pour résoudre notre problème. On considère qu'il n'y a qu'un seul jeu de donné dans notre cas (i.e., un seul et même b). On utilise le système précédent pour avoir une première estimation de a et $b_1=b_2=b$. On utilise l'estimation de a obtenu et le premier jeu de donné et le système (3) pour obtenir une estimation plus précise de b_1 et l'estimation de a obtenu et le deuxième jeu de donné et le système (3) pour obtenir une estimation plus précise de b_2. Puis on alterne, on utilise l'estimation de b_1 et le premier jeu de donné pour obtenir une estimation plus précise de a (que l'on pourrait moyenner avec l'estimation de b_2 et le deuxième jeu de donné et le système (3)), et ainsi de suite, jusqu'à convergence.

<4 pts>

II. Dérivation Numérique (8 pts)

En utilisant les développements de Taylor appropriés, donner l'ordre de précision de cette approximation de dérivée

$$f'''(x_0)\approx\frac{f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)}{h^3}$$

Réponse

On a les développements limités suivants

$$\begin{aligned} f(x_0+3h) &= f(x_0)+\frac{3h}{1!}f'(x_0)+\frac{9h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{27h^3}{3!}f'''(x_0)+O(h^4) \\ f(x_0+2h) &= f(x_0)+\frac{2h}{1!}f'(x_0)+\frac{4h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{8h^3}{3!}f'''(x_0)+O(h^4) \\ f(x_0+h) &= f(x_0)+\frac{h}{1!}f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0)+O(h^4) \end{aligned}$$

Donc, $f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)=h^3f'''(x_0)+O(h^4)$, et donc

$$f'''(x_0)\approx\frac{f(x_0+3h)-3f(x_0+2h)+3f(x_0+h)-f(x_0)}{h^3}+\mathbf{O(h)}$$

<8 pts>

III. Intégration Numérique (29 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x\,(\ln x)^{3.75}\,dx \qquad (4)$$

1. **Méthode de Simpson 1/3**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode de Simpson 1/3 (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
   <5 pts>
   (b) Quel est le facteur de gain en précision obtenu par cette méthode comparativement à la méthode des Trapèzes composites, on donnera une estimation ne nécéssitant pas le calcul de f' (i.e., si P_t est la précision obtenue par une estimation à l'aide de la méthode des trapèzes composites utilisant 4 intervalles et P_s la précision obtenue par la méthode de la question précédente, quel est le facteur P_s/P_t) ?)
   <3 pts>
2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**
   Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I.
   <5 pts>
3. **Méthode hybride analytique itérative/numérique**
   Soit $I(n)$, l'intégrale

$$I(n) = \int_1^2 x\,(\ln x)^n\,dx$$

   Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(3.75) = \int_1^2 x\,(\ln x)^{3.75}\,dx$. On se propose de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative.

   Calculer $I(0)$ et montrer qu'il existe, en s'aidant de l'intégration par partie, une relation de récurence entre $I(n)$ et $I(n-1)$ du type :

$$I(n) = 2(\ln 2)^n - \frac{n}{2} I(n-1)$$

   Trouver le polynôme de collocation d'ordre 2 qui permet d'interpoler la valeur de $I(3.75)$ à partir de $I(2)$, $I(3)$ et $I(4)$, valeurs déduites de la relation de récurence. En déduire finalement $I(3.75)$.
   <16 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

On obtient, par la méthode de Simpson (1/3), puisque $h = \frac{(2-1)}{4} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &= (1/12)\Big(f(1) + 4f(1.25) + 2f(1.5) + 4f(1.75) + f(2)\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx (1/12)\Big(0 + 4(0.0045) + 2(0.0508) + 4(0.1984) + (0.5059\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx 0.1182_{642}
\end{aligned}$$

<5 pts>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

• **Approximativement** : Précision en $h^2 = \frac{1}{4^2}$ pour la méthode des trapèze composites et précision en $h^4 = \frac{1}{4^4}$ pour la méthode de Simpson (1/3) composites, soit un facteur de gain en précision de $h^{-2} = (0.25)^{-2} = 16$ (pour le même coût calculatoire).

• **Plus précisément** : Si on veut être un peu plus précis en prenant la constante devant le h, on arrive à un facteur de gain en précision de $\frac{180}{12} \times (0.25)^{-2} = 240$ (pour le même coût calculatoire).

<**3 pts**>

Nota : Dans tous les cas, puisque le coût calculatoire est le même, on a donc tout intérêt à prendre la méthode de Simpson

$\boxed{\textbf{2}}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(-t+3)$ ou $t = -2x+3$, <**1 pt**>, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 x\,(\ln x)^{3.75} dx \\
&= \frac{1}{4}\int_1^2 (-t+3)\left[\ln(-\frac{t}{2}+\frac{3}{2})\right]^{3.75} dt \qquad < \textbf{1.5 pts} > \\
&= \frac{1}{4} \times \left((-\sqrt{3}/3)+3)\left[\ln(-\sqrt{3}/6+\frac{3}{2})\right]^{3.75} + \ (\sqrt{3}/3)+3)\left[\ln(\sqrt{3}/6+\frac{3}{2})\right]^{3.75}\right) \qquad < \textbf{1.5 pts} > \\
&\approx \frac{1}{4} \times (0.0049459344 + 0.4683315828) \\
&\approx 0.1183_{1937} \qquad < \textbf{1 pt} >
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{3}}$

$$I(0) = \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1.5 \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Par intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
I(n) &= \int_1^2 x\,[\ln x]^n dx = \left[\frac{x^2}{2}\,[\ln x]^n\right]_1^2 - \frac{n}{2} I(n-1) \\
I(n) &= 2(\ln 2)^n - \frac{n}{2} I(n-1) \qquad < \textbf{4 pts} >
\end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned}
I(0) &= 1.5 \\
I(1) &= 2\,(\ln 2) - \frac{1}{2} \times 1.5 = 0.6362943611 \\
I(2) &= 2\,(\ln 2)^2 - I(1) = 0.3246116667 \\
I(3) &= 2\,[\ln 2]^3 - 1.5 \times (I(2)) = 0.1791318039 \\
I(4) &= 2\,[\ln 2]^4 - 2 \times (I(3)) = 0.1034065894
\end{aligned}$$

< **4 pts** >

On a donc

n	2	3	4
$I(n)$	0.3246	0.1791	0.1034

$$\begin{aligned}
P_2 = I_2(n) &= \frac{(x-3)(x-4)}{(2-3)(2-4)} \times 0.3246 + \frac{(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)} \times 0.1791 + \frac{(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)} \times 0.1034 \\
&= (x-3)(x-4) \times 0.1623 - (x-2)(x-4) \times 0.1791 + (x-2)(x-3) \times 0.0517
\end{aligned}$$

<4 pts>

$$I_2(3.75) = 0.115_{78125...} \qquad < \textbf{2 pts} >$$

Nota : En utilisant sur mon ordinateur la méthode des Trapèzes avec 10 milles points (en *floats*) sur l'intervalle [1 2], on arrive a une estimation de 0.118251.

IV. Résolution d'Équation Différentielle (32 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{\sqrt{y(t)}}{1+t^2} \tag{5}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 1$.

   (a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins quatre décimales).
   <5 pts>

   (b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
   <5 pts>

   (c) Quel serait le nom d'une méthode itérative de résolution d'équation différentielles qui serait aussi précise que la méthode directe (i.e., celle donnée par le système d'équations que l'on devrait résoudre pour obtenir $y(0.2)$ et $y(0.4)$ par la méthode des différences finies en utilisant une différence finie centrée pour approximer $y'(t)$.
   <3 pts>

2. Vérifier que $y(t) = (k + 0.5\,\text{atan}(t))^2$ est solution de l'équation différentielle. Trouver k tel que $y(t)$ soit solution unique de l'Eq. (5).
   <5 pts>

3. Supposons que vous ayez un algorithme permettant de résoudre numériquement une équation différentielle. Vous ne savez pas le nom de cet algorithme ni sa précision (i.e., l'ordre n de cette méthode numérique). Vous désirez estimer l'ordre de précision de cet algorithme (i.e., estimer n). Définir une stratégie permettant expérimentalement et facilement d'estimer n. Justifier votre réponse. Est-ce que la connaissance de cet ordre n vous permettra de trouver le nom de la méthode numérique de cet algorithme ?
   <5 pts>

4. Mis à part le coût calculatoire et le fait que l'on doit amorcer la méthode d'Adams Moulton par une procédure de Runge Kutta du même ordre, dire quelles sont les avantages et inconvénients majeurs de la méthode de Runge Kutta et d'Adams Moulton du même ordre.
   <4 pts>

5. Qu'est ce qui rend les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 5 ou 6 si intéressantes (et donc les plus utilisées industriellement et scientifiquement parlant) par rapport au méthode (de Runge Kutta) d'ordre inférieur mais aussi d'ordre supérieur ? Justifier votre réponse.
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{\sqrt{y_n}}{1+t_n^2}\right) \qquad < \mathbf{1\ \ pt} >$$

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	1.0
1	0.2	1.2
2	0.4	1.4106_{6252}

<4 pts>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\,\underbrace{\left(\frac{\sqrt{y_n}}{1+t_n^2}\right)}_{f(t_n,y_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	-	1.0
1	0.2	1.2	1.20533
2	0.4	1.4165	1.4135

<5 pts>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

Puisque l'approximation en différence finie centrée est en $O(h^2)$, la méthode itérative qui a ce même terme d'erreur global (de cette méthode de différence finie) est la méthode d'Euler modifiée.

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

La vérification est immédiate car si $y(t) = (k + 0.5\,\text{atan}(t))^2$, on a $y'(t) = \frac{1}{1+t^2}(k + 0.5\,\text{atan}(t))$. De plus on trouve immédiatement $k = 1$.

<5 pts>

Nota : On a donc analytiquement $y_1 = 1.207136812$, $y_2 = 1.416702653$

$\boxed{\textbf{3.}}$

•1• Une première stratégie possible serait de demander de résoudre numériquement une équation différentielle que l'on sait résoudre analytiquement. La connaissance de la borne supérieure de l'erreur de chaque méthode nous permettrait ainsi de “deviner” son ordre de précision.

Mais si on veut vraiment être plus précis dans la résolution de ce problème, il faut se rappeler que lorsqu'on a une méthode itérative de résolution d'équations différentielles en $O(h^n)$, le terme d'erreur est 2^n fois plus petit lorsqu'on divise le pas h par deux.

•2• De ce fait, une façon plus précise d'estimer cet ordre de précision serait de prendre une équation différentielle que l'on sait résoudre analytiquement et la résoudre numériquement pour un pas h et puis pour un pas $2h$. Le rapport de l'erreur entre le 2ième et 1ième essai sera donc 2^n fois plus grand avec n une bonne estimation de l'ordre de la méthode considérée.

•3• On peut inventer une troisième stratégie si on ne connait pas la résolution analytique de l'équation différentielle. Une stratégie possible pourrait être la suivante. Faire fonctionner la méthode itérative de résolution du point initial au point final avec le plus petit pas h possible ($1er$ essai). De ce fait, on s'assure qu'au point final, il n'y a presque aucune erreure. On recommence avec un pas h, 1000 fois plus grand (2ième essai) . On calcul ainsi l'erreur au point final. Ensuite on voit comment cette erreur évolue pour un pas h, 2000 fois plus grand (3ième essai). Le rapport de l'erreur entre le 3ième et 2ième essai sera donc 2^n fois plus grand avec n une bonne estimation de l'ordre de la méthode considérée.

<2.5 pts>

Ces trois méthode nous donneraient respectivement une estimation assez bonne, excellente et assez bonne de l'ordre de la méthode, mais pas son nom car beaucoup de méthodes ont le même ordre de précision.

<2.5 pts>

4.

Avec Adams Moulton, on connait très précisement, pour chaque itération, une borne supérieure de l'erreur que l'on fait, mais on ne peut en cours de route, modifier le pas de l'algorithme itératif pour tenir compte d'une trop grande (éventuelle) erreur. Pour Runge Kutta, on a aucun moyen précis de calculer, à chaque itération, l'erreur que l'on fait (on a en fait qu'une approximation si on prend RK felberg), mais pas contre on peut en cours de route, modifier le pas de l'algorithme (i.e., diminuer le pas h) pour tenir compte d'une (éventuelle) trop grande erreur.

<4 pts>

5.

Ce sont celles qui pour une même précision, ont le cout calculatoire le plus faible et aussi celles pour un même coût calculatoire, ont la précision la plus grande (i.e., le terme d'erreur les plus petites). En résumé, elles ont donc le compromis précision/coût calculatoire les plus intéressantes, ce qui les rend les plus populaires.

<5 pts>