DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *13/04/2011*

I	Moindres Carrés (34 pts)
II	Interpolation (21 pts)
III	Dérivation Numérique (20 pts)
IV	Intégration Numérique (23 pts)
V	Résolution d'Équation Différentielle (16 pts)
Total	114 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (34 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, théoriquement distribuées selon la loi suivante

$$y\,(x) = \frac{a}{x+b}$$

Ces N mesures sont entachées d'une erreur expérimentale et on cherche, dans cet exercice, à estimer les paramètres a et b de cette loi, qui s'ajuste le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées.

1. (a) Donner l'expression $R(a,b)$ appelée résidu ou écart quadratique (fonction des coefficients a et b et des N données expérimentales x_i,$y_i = y(x_i)$) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés.
   $<$**3 pts**$>$

   (b) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés de cette loi (i.e., le système d'équations qui permettra ensuite de trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés).
   $<$**9 pts**$>$

   (c) On considère la méthode de Newton-Raphson pour la résolution de ce système de deux equations non-linéaires à partir d'une estimation initiale $(a^{[0]}, b^{[0]})$. On vous demande :

      i. De rappeler la relation itérative de Newton-Raphson permettant d'obtenir une nouvelle estimation $(a^{[n+1]}, b^{[n+1]})$, en fonction des N données $[x_i, y_i = y(x_i)]$ et d'une estimation précédente $(a^{[n]}, b^{[n]})$.
      $<$**4 pts**$>$

      ii. De donner le calcul analytique des quatres composantes de la matrice Jocobienne de la relation itérative de Newton-Raphson précédente.
      $<$**8 pts**$>$

      iii. De donner une approximation numérique pour les quatres composantes de cette matrice Jacobienne (permettant d'éviter le calcul analytique).
      $<$**4 pts**$>$

2. (a) On va maintenant tenter de linéariser le problème pour pouvoir arriver à deux équations normales linéaires qui seraient facilement solvables par une méthode du type "pivot de Gauss". Trouver le changement de variables que l'on doit considérer ici pour que les données (après changement de variables) se répartissent linéairement.
   $<$**6 pts**$>$

Réponse

1(a)

Le résidu que l'on cherche à minimiser par la technique de lissage des moindres carrés est

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a}{x_i+b} \Big)^2 \qquad <\textbf{ 3 pts }>$$

1(b)

Trouver les coefficients a et b au sens des moindres carrés, c'est trouver a et b pour que $R(a,b)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$. La dérivation par rapport au paramètre a donne :

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} \quad = \quad 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a}{x_i+b} \Big) \frac{\partial \big(y_i - \frac{a}{x_i+b} \big)}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a}{x_i+b} \Big) \Big(-\frac{1}{x_i+b} \Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$ est donc

$$0 \quad = \quad a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^2} \; - \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)}$$

La dérivation par rapport au paramètre b donne

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} \quad = \quad 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a}{x_i + b} \Big) \frac{\partial \big(y_i - \frac{a}{x_i + b} \big)}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i - \frac{a}{x_i + b} \Big) \Big(\frac{a}{(x_i + b)^2} \Big)$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$ est donc

$$0 \quad = \quad a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^3} \; - \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)^2}$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes

$$\begin{cases} F_1(a,b) \;=\; a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^2} \; - \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)} \quad = \quad 0 \\ F_2(a,b) \;=\; a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^3} \; - \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)^2} \quad = \quad 0 \end{cases}$$

<9 pts>

1(c).i

La relation itérative de Newton-Raphson, permettant d'obtenir une nouvelle estimation $(a^{[n+1]}, b^{[n+1]})$, en fonction des N données $[x_i, y_i = y(x_i)]$ et d'une estimation précédente $(a^{[n]}, b^{[n]})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} a^{[n+1]} \\ b^{[n+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{[n]} \\ b^{[n]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial a^{[n]}} & \frac{\partial F_1(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial b^{[n]}} \\ \frac{\partial F_2(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial a^{[n]}} & \frac{\partial F_2(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial b^{[n]}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1(a^{[n]}, b^{[n]}) \\ F_2(a^{[n]}, b^{[n]}) \end{pmatrix}$$

ou en fonction de $R(a,b)$, de façon équivalente

$$\begin{pmatrix} a^{[n+1]} \\ b^{[n+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{[n]} \\ b^{[n]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial b^2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial a} \\ \frac{\partial R(a^{[n]}, b^{[n]})}{\partial b} \end{pmatrix}$$

<4 pts>

1(c).ii

On a donc trois dérivés partielles à calculer pour construire analytiquement la matrice Jacobienne

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial a} \quad \Big(= \frac{\partial^2 R(a,b)}{\partial a^2} \Big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^2} \\ \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial b} \quad \Big(= \frac{\partial^2 R(a,b)}{\partial b^2} \Big) = -3a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^4} \; + 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)^3} \\ \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial a} \quad \Big(= \frac{\partial^2 R(a,b)}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 R(a,b)}{\partial b \partial a} \Big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{(x_i + b)^2} - 2a \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(x_i + b)^3} \end{cases}$$

<8 pts>

1(c).iii

En utilisant une simple approximation numérique du premier ordre, on évite d'avoir recours à un calcul analytique (avec ϵ petit mais supérieur à l'epsilon machine)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial a} = \frac{F_1(a+\epsilon,b)-F_1(a,b)}{\epsilon} \\ \frac{\partial F_2(a,b)}{\partial b} = \frac{F_2(a,b+\epsilon)-F_2(a,b)}{\epsilon} \\ \frac{\partial F_1(a,b)}{\partial b} = \frac{F_1(a,b+\epsilon)-F_1(a,b)}{\epsilon} \end{array}\right.$$

<4 pts>

$\boxed{\textbf{2(a)}}$

On doit simplement considérer le changement de variable $z = 1/y$, en effet

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+b} \\ \frac{1}{y} &= \frac{x+b}{a} = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a} \\ z &= A\,x + B \end{aligned}$$

qui nous conduit à la distribution linéaire des données $[x_i, z(x_i) = z_i]$ avec les paramètres (A, B) avec $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{b}{a}$.
<6 pts>

Nota : On peut souligner toutefois qu'il y a une différence en fait entre ces deux méthodes des moindres carrées. La première réalise une régression des moindres carrés en y et l'autre en $1/y$. Dans le deuxième cas, on se ramène à une linéarité (et donc à des équations normales facilement solubles) mais avec un changement de variables et toute transformation (comme ce changement de variables) se fait au prix d'une modification de la structure des erreurs. Ainsi le résidu dans les deux cas est différent bien que le critère de régression (les moindre carrés) soit identique dans les deux cas.

II. Interpolation (21 pts)

$$\text{soit} \qquad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

1. Déterminer le polynôme $P(x)$ de Lagrange basé sur les points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
   <5 pts>
2. Évaluer une borne supérieure de l'erreur d'iterpolation faîte lorsqu'on utilise ce polynôme de Lagrange, calculé précedemment, pour interpoler en $x_0 = 0.5$, calculer et comparer cette borne supérieure d'erreur à l'erreur (d'interpolation) exacte.
   <8 pts>
3. Préciser si la méthode d'interpolation de Newton-Gregory est applicable dans notre exemple (justifier pourquoi) et si oui, si l'interpolation par cette méthode en $x_0 = 0.5$ serait identique à l'interpolation donnée précédente.
   <3 pts>
4. Donner, dans le cas de la formule de Newton-Gregory, une approximation de l'erreur en utilisant la règle du "prochain terme" (ou "next term rule") utilisant la table des différences utilisable lorsqu'on ne connait pas la fonction $f(x)$ (i.e., lorsqu'on connait uniquement les valeurs de cette fonction aux quatres points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$).
   <5 pts>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1.}}$

En utilisant donc le polynôme de collocation d'ordre deux qui passe par ces trois points, on a

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-1)(x+2)}{2} + \frac{x(x-2)}{-1} \times \frac{1}{2} + \frac{x(x-1)}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{(x-1)(x+2)}{2} - \frac{x(x-2)}{2} + \frac{x(x-1)}{6} \end{aligned}$$

<5 pts>

$\boxed{\mathbf{2.}}$

Une borne supérieure de l'erreur d'interpolation est donnée par

$$\begin{aligned} \big|f(0.5) - P_2(0.5)\big| &< \Big|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)\,!}\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\Big| \qquad n=2, \quad x=0.5, \quad \xi \in [0,2] \\ &< \Big|\frac{(1/(1+\xi))'''}{3\,!}\,(0.5-0)\,(0.5-1)\,(0.5-2)\Big| \\ &< \frac{1}{16} \cdot \Big|\Big(\frac{-1}{(1+\xi)^2}\Big)''\Big| \\ &< \frac{1}{16} \cdot \Big|\Big(\frac{2}{(1+\xi)^3}\Big)'\Big| \\ &< \frac{1}{16} \cdot \Big|\Big(\frac{-6}{(1+\xi)^4}\Big)\Big| \\ &< \frac{3}{8} \cdot \Big|\Big(\frac{1}{(1+\xi)^4}\Big)\Big| \\ &< \frac{3}{8} = 0.375 \quad (\xi = 0) \end{aligned}$$

Une valeur interpolée pour $P(0.5)$ est donc estimée par

$$P(1/2) = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} - \frac{(1/2)(-3/2)}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{6} = (3/8) + (3/8) - (1/24) = 17/24$$

avec une erreur d'interpolation estimée à $|\Delta(P_2(0.5) - f(1/2))| \leq 0.375$
<8 pts>

Nota : On peut remarquer que dans ce cas précis, cela n'est pas une "bonne borne supérieure" d'erreur ou dans ce cas précis, c'est ce qu'on pourait appeller une borne d'erreur assez pessimiste (i.e., d'une utilité assez limitée) puisque, en réalité, l'erreur véritable est beaucoup plus faible dans ce cas $|P_2(0.5) - f(1/2)| = |17/24 - 2/3| = 1/24 \approx 0.04166$. La question 4. nous permettra d'avoir une approximation et non une borne supérieure mais qui sera beaucoup plus parlante et exploitable sans avoir besoin de calculer analytiquement une dérivée troisième.

$\boxed{\mathbf{3.}}$

Oui, la méthode d'interpolation de Newton-Gregory est applicable car les points sont équidistants et ordonnés et la méthode de Newton-Gregory donnerait aussi la même valeur d'interpolation car le polynôme de Lagrange ou celui donné par la méthode de Newton Grégory est le polynôme de collocation qui est unique.
<3 pts>

$\boxed{\mathbf{4.}}$

En prenant donc ces trois points (équidistants et ordonnés), on doit donc calculer le tableau des différences qui s'écrit

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1			
		-1/2		
1	1/2		1/3	
		-1/6		-1/4
2	1/3		1/12	
		-1/12		
3	1/4			

Une approximation de l'erreur $E(x = 0.5)$ est donnée par

$$|E(x = 0.5)| \approx \left| \frac{s(s-1)(s-2)}{6} \, (-1/4) \right|$$

avec le changement de variable $s = (0.5 - x_0)/h = (0.5 - 0.0)/1.0 = 0.5$. On obtient donc

$$|E(x = 0.5)| \approx \left| \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \right| = \frac{1}{64} \approx 0.015625$$

<5 pts>

Nota : Cela est, somme toute, une bonne aproximation (comparativement à la borne d'erreur obtenue précedement qui etait très pessimiste et) qui à été (de plus) obtenue facilement car elle nous a éviter de calculer analytiquement une dérivée troisième (cf. question 2.). De plus cette méthode, qui demande peu de calcul, peut s'implémenter facilement sur ordinateur.

III. Dérivation Numérique (20 pts)

Soit la formule d'approximation numérique suivante

$$f''(x_0) = \frac{f(x_1) - 2\, f(x_0) + f(x_{-1})}{h^2}$$

1. Retrouver cette formule numérique en utilisant la définition de base, c'est à dire la dérivation seconde du polynôme de collocation.
   <8 pts>
2. Retrouver, pour la formule numérique **centrée** (i.e., pour $s = 1$) d'approximation de la dérivée première utilisant le polynôme de collocation de degré 2, c'est à dire pour cette formule

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

   que le terme d'erreur est $E_2'(x_o) = \frac{1}{6}\, h^2\, f'''(\xi)$ dans lequel h est la distance séparant deux points de données et ξ une variable se baladant dans l'interval contenant toute les données d'abscisses d'entrées utilisées.
   <8 pts>

3. On désire mesurer la vitesse v d'une fusée miniature dans notre atmosphère. Le physicien, avec lequel vous travaillez, vous propose deux possibilités : la première consiste à recueuillir la position de la fusée par une technique de GPS pour diférentes valeurs du temps t (i.e., par exemple toute les $h = 0.05$ secondes) et utiliser une technique de dérivation numérique pour trouver la vitesse pour les différentes valeurs du temps t (car $v = \partial x/\partial t$) ou deuxième alternative, recueillir les données d'un accéléromètre[1] (donnant l'accélération de la fusée toute les $h = 0.05$ secondes) installées dans la fusée et utiliser une technique d'intégration numérique pour trouver la vitesse pour les différentes valeurs du temps t (car la vitesse (au temps t) $= \int_0^t a(t)\,dt$). En sachant que les données sont receuillies toute les $h = 0.05$ secondes dans les deux cas avec la même précision (des instruments de mesure), quelle technique devrait-on privilégiée ? Justifier votre réponse.
   <4 pts>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

Cette formule est centrée, elle résulte donc de la dérivation seconde d'un certain nombre de termes du polynôme de collocation $P(s)$ pour $s = 1$. Le polynôme de collocation $P(s)$ s'écrit

$$P(s) = f_0 + s\,\frac{\Delta f_0}{1!} + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \ldots$$

avec $f_i = f(x_i)$ et Δf_i le terme de différence utilisé dans le tableaux de la méthode d'interpolation de Newton-Gregory. En dérivant deux fois par rapport à x, en oubliant pas que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}$, puisque $s = (x - x_0)/h$.

$$\begin{aligned}
P'(s) &= \frac{1}{h}\,\big(\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots\big) \\
P''(s=1) &= \frac{1}{h^2}\,\big(\Delta^2 f_0\big) = \big(\Delta(f_1 - f_0\big) = \frac{1}{h^2}\big(f_2 - 2\,f_1 + f_0\big) \\
f''(x_1) &= \frac{1}{h^2}\big(f_2 - 2\,f_1 + f_0\big) \\
f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}\big(f_1 - 2\,f_0 + f_{-1}\big) \qquad \text{par translation d'indice}
\end{aligned}$$

<8 pts>

$\boxed{\mathbf{2}}$

Pour obtenir cette borne, on doit dériver (par rapport à x) le terme d'erreur du polynôme de collocation de degré 2 qui lui est de variable s (avec la relation $s = (x - x_0)/h$)

$$\begin{aligned}
E_2' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\binom{s}{3}\,h^3\,f'''(\xi)\right) &= \frac{1}{h}\,\frac{\partial}{\partial s}\Big[\,\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\,h^3\,f'''(\xi)\Big]_{s=1} + \left[\binom{s}{3}\,h^3\,\frac{\partial}{\partial x}f'''(\xi)\right]_{s=1} \\
&= \frac{1}{h}\,\frac{\partial}{\partial s}\Big[\,\frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6}\,h^3\,f'''(\xi)\Big]_{s=1} + \underbrace{\left[\frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\,\frac{\partial}{\partial x}f'''(\xi)\right]_{s=1}}_{=0} \\
&= \frac{1}{h}\,\Big[\,\frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\,h^3\,f'''(\xi)\Big]_{s=1} \\
&= -\frac{1}{6}\,h^2\,f'''(\xi)
\end{aligned}$$

---

[1] un accéléromètre a un principe de fonctionnement très simple ; une masse se déplace sous l'action de l'accélération de la fusée en sens inverse. En reliant ce déplacement à un dispositif électrique, on obtient une valeur de l'accélération.

<8 pts>

$\boxed{3}$
L'intégration numérique car celle ci, contrairement à la dérivation numérique, est moins sensible aux erreurs numérique et à un terme d'erreur en puissance de h plus elevée (2 ordres de plus par rapport à une méthode de dérivation numérique). En choisissant une méthode d'intégration numérique pour estimer la vitesse de la fusée, on aura une estimation à la fois plus précise et plus stable (ou moins sensible) aux différentes erreures numériques.
<4 pts>

IV. Intégration Numérique (23 pts)

Dans cet exercie, on va reprendre le tableau de valeurs donné en page 37 du chapitre 5 (Intégration Numérique), je rappelle que ces données sont les suivantes

x	0.00	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	0.000	0.199	0.389	0.565	0.717

1. Utiliser la méthode de Simpson 1/3 et autant de fois que vous pouvez le principe d'extrapolation de Richardson pour obtenir une valeur approchée de

$$\int_0^{0.8} f(x)\,dx$$

   Donner ausssi une approximation grossière (i.e., en $O(h^n)$, avec h, la distance entre 2 points de données, en définissant le bon n), de l'erreur commise par cette méthode d'intégration.
   <13 pts>
2. Est-ce que la méthode d'intégration précédente est plus, moins ou aussi précise que la méthode de Romberg vue en cours (i.e., la méthode de la quadrature composite des trapèzes avec la méthode d'Extrapolation de Richardson appliquée autant de fois que possible) sur ce tableau de valeurs ? Pouvait-on prévoir le résultat ? Justifier votre réponse.
   <4 pts>
3. En utilisant une approximation grossière de l'erreur commise (i.e., en $O(h^n)$), combien aurait-il fallut de points de données pour obtenir, avec la méthode des quadratures composites des trapèzes, la même précision que la méthode de Romberg vue en cours sur ce tableau de valeurs ?
   <6 pts>

Réponse

$\boxed{1}$
On obtient, par la méthode de Simpson 1/3

$$\begin{aligned}
I_{1,4} &= (h/3)\Big(f(0.00)+4f(0.20)+2f(0.40)+4f(0.60)+f(0.80)\Big) \quad < \textbf{3 pts} > \\
I_{1,4} &= (0.2/3)\Big(0+0.796+0.778+2.26+0.717\Big) \\
I_{1,4} &= 0.3034+O(h^4) \quad < \textbf{2 pts} >
\end{aligned}$$

et en utilisant cette même formule avec un pas h, deux fois plus grand, c'est à dire un point sur deux du tableau de valeur

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= (h/3)\Big(f(0.00) + 4f(0.40) + f(0.80)\Big) \quad < \textbf{2 pts} > \\ I_{1,2} &\approx (0.4/3)\Big(0 + 1.556 + 0.717\Big) \\ I_{1,2} &\approx 0.3030\overline{6} + O(16\,h^4) \quad < \textbf{2 pts} > \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'extrapolation de Richardson sur ces deux approximations numérique en h^4, avec la formule donnée en cours, pour obtenir une estimation finalement plus précise

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= I_{1,4} + \frac{1}{2^4 - 1}\big(I_{1,4} - I_{1,2}\big) \\ &= 0.3034 + \frac{1}{15}\big(0.3034 - 0.3030\overline{6}\big) \\ &\approx 0.3034\overline{2} + O(h^6) \end{aligned}$$

<4 pts>

Nota : Le terme d'erreur est bien en $O(h^6)$ et non pas en $O(h^5)$ et sera expliqué à la question suivante.

$\boxed{\mathbf{2}}$

La méthode précédente est en fait équivalente à la méthode de Romberg vue en cours et il est donc normale que l'on trouve à la fois, la même approximation numérique pour cette intégrale et le même terme d'erreur en $O(h^6)$.

En effet, on a montré en cours que l'application de la méthode d'extrapolation de Richardson sur la méthode des Trapèzes était équivalente à la méthode de Simpson 1/3. $I_{1,4}$ est une estimation numérique de cette intégrale qui est donc équivalente à la méthode d'extrapolation de Richardson combinant la quadrature composite des trapèzes avec un espacement des points de données de h et de $2h$. $I_{1,2}$ est équivalente à la méthode d'extrapolation de Richardson combinant la quadrature composite des trapèzes avec un espacement des points (de données) de $2h$ et de $4h$. L'étape suivante, c'est à dire la combinaison de $I_{1,4}$ et $I_{1,2}$ grâce à la formule d'extrapolation de Richardson en utilisant un terme d'erreur en $O(h^4)$, est identique ensuite et conduit à une estimation dans les deux cas en $O(h^6)$ car le terme d'erreur de la méthode des quadratures composites des trapèzes ne contient que des termes de puissance pairs (cf. cours).
<4 pts>

$\boxed{\mathbf{3}}$

Avec la méthode de Romberg vue en cours (ou la méthode précédente), on arrive à une précision de l'ordre de $O(h^6)$, c'est à dire, approximativement de $0.2^6 = 6.4\,10^{-5}$. Avec la méthode des quadratures composites des trapèzes, on a une précision de l'ordre $\approx h^2$. Il nous faudrait donc un h, c'est à dire un espacement des points tel que $h^2 = 6.4\,10^{-5}$ pour arriver à la même précision que la méthode de Romberg, soit $h = 8 \cdot 10^{-3}$, ou, puisque le domaine d'intégration est de 0.8, de $0.8/8 \cdot 10^{-3} = 100$ points !
<6 pts>

V. Résolution d'Équation Différentielle (16 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \sqrt{t \cdot \exp(y(t))} \tag{1}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 1$.

(a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins quatre décimales).
<5 pts>

(b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
<5 pts>

(c) On revient à la méthode d'Euler simple de la question (a). Donner une estimation de $y(0.4)$ en partant de la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 1$ et avec un pas $h = 0.4$. Combiner ensuite ce résultat avec $y(0.4)$ obtenue à la question (a) par la méthode d'extrapolation de Richardson pour obtenir une estimation plus précise de $y(0.4)$ (que l'on appellera $y_R(0.4)$).
Est-ce que cette estimation est plus précise que $y(0.4)$ obtenue par la méthode d'Euler modifiée de la question (b) (avec un pas de $h = 0.2$) ? Justifier votre réponse.
<6 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\sqrt{t_n \cdot \exp(y_n)}\Big)$$

<1 pt>
Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	1.0
1	0.2	1.0
2	0.4	1.1475

<4 pts>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\Big(\sqrt{t_n \cdot \exp(y_n)}\Big)}_{f(t_n, y_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

<1 pt>
Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	-	1.000
1	0.2	1.000	1.0737
2	0.4	1.2267	1.2670

<**4 pts**>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.4$ et $y_0 = 1$

$$y_{h=0.4}(0.4) = y(0.0) + 0.4\sqrt{0.0 \cdot \exp(y(0.0))} = 1$$

<**1 pt**>

On va ensuite combiner cette estimation avec $y(0.4) = 1.1475$ en utilisant la formule d'extrapolation de Richardson et en utilisant le fait que ces deux estimations sont en $O(h)$.

$$\begin{aligned} y_R(0.4) &= y_{[h=0.2]} + \frac{1}{2^1 - 1}(y_{[h=0.2]} - y_{[h=0.4]}) \\ &= 2\, y_{[h=0.2]} - y_{[h=0.4]} \\ &\approx (2 \times 1.1475) - 1.0 \\ &\approx 1.295 \end{aligned}$$

Estimation censée être de l'ordre de $O(h^2)$, i.e., du même ordre de grandeur que l'erreur locale de la méthode d'Euler modifiée associée à $y(0.4) = 1.2670$.

<**5 pts**>