DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *28/09/2012*

I	Moindres Carrés (36 pts)
II	Interpolation (20 pts)
III	Intégration Numérique (39 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (19 pts)
Total	114 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (36 pts)

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, théoriquement distribuées selon la loi Gaussienne (de paramètre $[A, \mu, \sigma]$) suivante :

$$y\,(x) = A\,\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\Big)$$

Ces N mesures sont entachées d'une erreur expérimentale et on cherche, dans cet exercice, à estimer les paramètres A, μ et σ de cette loi, qui s'ajuste le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées.

1. (a) Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrées, on va se baser sur le fait qu'une fonction Gaussienne est l'exponentielle d'une fonction quadratique, et ainsi se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster à un polynôme d'ordre 2, d'équation : $a + bx + cx^2$.
   Montrer que le changement de variable $[x_i, y_i] \rightarrow [x_i, \ln(y_i)]$ (i.e., y_i en $\ln(y_i)$) permet cela et exprimer ensuite les paramètres (a, b, c) de cette quadratique en fonction des paramètres (A, μ, σ^2) de la Gaussienne.
   <6 pts>

   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner l'expression du résidu $R(a, b, c)$ (ou écart quadratique) qui serait minimisée par cette méthode des moindres carrés.
   <3 pts>

   (c) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a b et c.
   <5 pts>

   (d) Trouver les coefficients a b et c en utilisant les données suivantes :
   <8 pts>

x_i	0	0.5	1.0	2.5
y_i	1	7.4	7.4	1

   (e) En déduire les paramètre A, μ et σ^2 de la Gaussienne.
   <5 pts>

2. Si les données sont entachées d'un bruit additif aléatoire, les données associées à de faible valeurs ou amplitudes auront une erreur relative plus grande que les autres et contribueront plus dans le calcul du résidu (et donc dans l'estimation finale des paramètres) que les autres données. Au contraire, donner une plus grande importance aux plus fortes valeurs de y_i est souvent préféré par les statisticiens qui savent que les plus fortes valeurs de y sont aussi (souvent) les mesures qui sont les plus fiables (i.e., les moins entachées d'erreurs de mesure) et dont il est préférables d'accorder une plus grande importance (i.e., confiance) dans le processus d'interpolation.

   Pour accorder une plus grande importance (i.e., confiance) au plus forte valeurs de y_i dans le processus d'interpolation, une possibilité consiste à redefinir la fonction d'erreur ou de résidue en remplacant chaque erreur

$$e_i = [\ln(y_i) - (a + bx_i + cx_i^2)] \qquad \text{par} \qquad e_i = y_i[\ln(y_i) - (a + bx_i + cx_i^2)]$$

   On obtient ainsi, ce que l'on appelle, une estimation au sens des *moindres carrées pondérés* (ici pondérés par les plus fortes valeurs de y_i qui sont moins entachées de bruit).

   (a) Avec cette nouvelle définition de l'erreur et donc du residu, trouver les nouvelles équations normales (pondérées) permettant d'estimer les paramètres (a, b, c) au sens des moindres carrées pondérés (ne pas résoudre ces équations).
   <10 pts>

Réponse

1(a)

Si les N mesures expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$ sont distribuées selon une loi Gaussienne d'équation $y\,(x) = A\ \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\Big)$, alors, les N nouvelles données $[x_i, \ln(y_i)]$ sont distribuées selon

$$\ln(y) = \ln(A) + \frac{-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2} = \underbrace{\Big(\ln(A) - \frac{\mu^2}{2\,\sigma^2}\Big)}_{a} + \underbrace{\Big(\frac{\mu}{\sigma^2}\Big)}_{b}\,x + \underbrace{\Big(-\frac{1}{2\,\sigma^2}\Big)}_{c}\,x^2 = a + bx + cx^2$$

$<$**6 pts**$>$

1(b)

Après changement de variable, le résidu que l'on cherchera à minimiser par cette technique des moindres carrés est

$$R(a,b,c) = \sum_{i=1}^{N}\Big(\ln(y_i) - (a + b\,x_i + c\,x_i^2)\Big)^2 \qquad < \textbf{3 pts} >$$

Nota : Ce résidu est légèrement différent de celui que l'on aurait écrit avant le changement de variable, c'est à dire

$$R^{\circ}(A,\mu,\sigma) = \sum_{i=1}^{N}\epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\Big[y_i - A\ \exp\Big(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\Big)\Big]^2$$

car tout changement de variable entraine une modification de l'erreur ϵ_i ou une modification de poids de chaque couple (x_i, y_i) dans la somme des carrées des résidus.

1(c)

Les paramètres (a,b,c) sont solution des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours) :

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 & \sum_{i=1}^N x_i^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^N x_i\ \ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^N x_i^2\ \ln(y_i) \end{pmatrix} \qquad < \textbf{5 pts} >$$

1(d)

Avec le changement de variable, on trouve les données suivantes

x_i	0	0.5	1	2.5
$\ln y_i$	0	2.0	2.0	0

$<$**2 pts**$>$

et le système d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7.5 \\ 4 & 7.5 & 16.75 \\ 7.5 & 16.75 & 40.125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} \qquad < \textbf{2 pts} >$$

puis par deux opérations élémentaires ; $R_2 = R_2 - \frac{4}{4}R_1$ et $R_3 = R_3 - \frac{7.5}{4}R_1$; on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7.5 \\ 0 & 3.5 & 9.25 \\ 0 & 9.25 & 26.0625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

puis par l'opérations élémentaire $R_3 = R_3 - \frac{9.25}{3.5}R_2$), on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7.5 \\ 0 & 3.5 & 9.25 \\ 0 & 0 & 1.616 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2.357 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, par substitution arrière, $\boxed{c \approx -1.45856}$, puis $3.5b + 9.25 \times -1.45856 = -1$, i.e., $\boxed{b = 3.56906}$ et $4a + 4 \times 3.56906 + 7.5 \times -1.45856 = 4$, i.e., $\boxed{a = 0.16575}$.

<4 pts>

1(e)

En utilisant le fait que
$$\begin{cases} a &= \ln(A) - \frac{\mu^2}{2\,\sigma^2} \\ b &= \frac{\mu}{\sigma^2} \\ c &= -\frac{1}{2\,\sigma^2} \end{cases}$$

On obtient facilement, d'abord $\mu = -b/2c$, puis $\sigma = \sqrt{-1/2c}$ et enfin $A = \exp(a - \frac{b^2}{4c})$

<3 pts>

Ce qui permet d'obtenir numériquement :
$$\begin{cases} A = 10.475 \\ \mu = 1.22 \\ \sigma = 0.585 \end{cases}$$

<2 pts>

2.(a)

Le nouveau résidu (pondéré) devient

$$R(a,b,c) = \sum_{i=1}^{N} \Big(y_i \left[\ln(y_i) - (a + b\,x_i + c\,x_i^2) \right] \Big)^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \left[\ln(y_i) - (a + b\,x_i + c\,x_i^2) \right]^2$$

Trouver les coefficients a, b et c au sens des moindres carrés, c'est trouver a, b et c pour que $R(a,b,c)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(a,b,c)}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial R(a,b,c)}{\partial b} = 0$ et $\frac{\partial R(a,b,c)}{\partial c} = 0$. La dérivation par rapport a chacun des trois paramètres donne les nouvelles équations normales ou le système matriciel suivant :

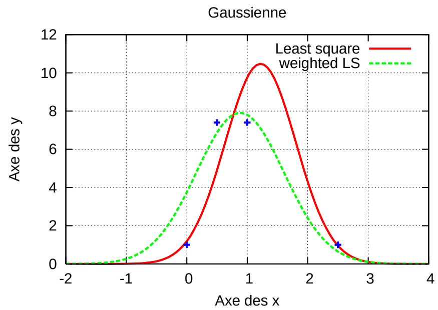
$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^3 y_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i^4 y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N y_i^2\,\ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^N x_i\,y_i^2\,\ln(y_i) \\ \sum_{i=1}^N x_i^2\,y_i^2\,\ln(y_i) \end{pmatrix}$$

< 10 pts >

Nota : Numériquement,

$$\begin{pmatrix} 111.52 & 84.64 & 74.7 \\ 84.64 & 74.7 & 77.23 \\ 74.7 & 77.23 & 97.245 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 219.04 \\ 164.28 \\ 136.9 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, par substitution arrière, $c \approx -0.95180$, $b = 1.68064$ et $a = 1.32613$. On obtient ensuite $\mu = 0.882874$, $\sigma = 0.72479$ et $A = 7.909$.
Dans notre cas particulier où on a que quatre points (! !), voici la representation de la Gaussienne qui s'ajuste le mieux aux données, au sens des moindre carré (least square) en rouge, et celle qui s'ajuste le mieux aux données au sens des moindre carré pondéré (weighted least square) en verte.



On voit que la deuxième méthode (courbe verte) va donner plus d'importance aux données qui ont une amplitude élevée comparativement à la première méthode (courbe rouge).

II. Interpolation (20 pts)

1. Trouver, en utilisant la formule de Lagrange, une interpolation de $\sqrt{105}$ en utilisant la connaissance des points suivants

x_k	81	100	121
$y_k = \sqrt{x_k}$	9	10	11

<**7 pts**>

2. Trouver ensuite une borne supérieure de l'erreur d'interpolation associée à cette estimation et le nombre de cse correspondant à cette estimation.
<**6 pts**>

3. Trouver une approximation de $\sqrt{105}$ avec un developpement limité de la fonction $\sqrt{x}$ au voisinage de 100 au premier ordre. Donner une borne supérieure de cette estimation.
<**7 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En utilisant donc le polynôme de collocation d'ordre deux qui passe par ces trois points, on a

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{(x-100)(x-121)}{(-19)(-40)} \times 9 + \frac{(x-81)(x-121)}{(19)(-21)} \times 10 + \frac{(x-81)(x-100)}{(40)(21)} \times 11 \\ &= (x-100)(x-121) \times 0.01184 + (x-81)(x-121) \times -0.02506 + (x-81)(x-100) \times 0.013095 \end{aligned}$$

<5 pts>

Une valeur interpolée pour $\sqrt{105}$ est (en gardant cinq chiffres après la virgule) donc estimée par

$$\begin{aligned} \sqrt{105} &\approx (5 \times -16 \times 0.01184) + (24 \times -16 \times -0.02506) + (24 \times 5 \times 0.01309) \\ &\approx -0.947368 + 9.62406 + 1.5714 \approx 10.24809 \end{aligned}$$

<2 pts>

2.

La dérivé de $x^{1/2}$ est $1/2\,x^{-1/2}$, sa dérivé seconde est $-1/4\,x^{-3/2}$ et sa dérivé troisième est $3/8x^{-5/2}$. Une borne supérieure de l'erreur d'interpolation est donc donnée par (cf. cours)

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{105} - P_2(105)\right| &< \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)\,!}\,(x-81)\,(x-100)\,(x-121)\right| \qquad \xi \in [81, 121] \\
&< \left|\frac{3/8\,\xi^{-5/2}}{3\,!}\,(24)\,(5)\,(-16)\right| \\
&< \left|\frac{3/8\,(81)^{-5/2}}{3\,!}\,(24)\,(5)\,(-16)\right| \\
&\lessapprox 0.0020
\end{aligned}$$

<5 pts>

On a $0.0020 < 0.5 \times 10^{-2}$ donc deux cse dans l'estimation de $\sqrt{105} \approx 10.\underline{24}8$

<1 pt>

Nota : A comparer avec la vraie valeur $\sqrt{105} \approx 10.24695077$

3.

En utilisant un développement limité d'ordre un ($n = 1$) au voisinage de $a = 100$ pour trouver une approximation de la valeur de la fonction $f(x)$ en $x = 105$, on a (cf. cours)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R(x,a) \quad \text{avec} \quad R(x,a) = \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

C'est à dire numériquement

$$\begin{aligned}
\sqrt{105} &= \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \times (105 - 100) + R(x = 105, a = 100) \\
&= 10.25 + R(x = 105, a = 100)
\end{aligned}$$

<4 pts>

soit 10.25 comme approximation avec comme borne supérieure d'erreur de cette approximation linéaire

$$R(x = 105, a = 100) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi \in [81, 121]$$

C'est à dire numériquement

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad (\text{avec} \quad \xi \in [81, 121]) = \frac{(105-100)^2}{(2)!}(1/4)(81)^{-3/2} \approx 0.0043$$

<3 pts>

III. Intégration Numérique (39 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+5}\,dx \tag{1}$$

1. **Méthode de Simpson 1/3**
   (a) Donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode de Simpson 1/3 (quadratures composites) et en utilisant 4 intervalles.
   $<$**6 pts**$>$
   (b) Quel est le facteur de gain ou de perte en précision obtenu par cette méthode comparativement à la méthode de Simpson 3/8, quadrature simple. On donnera une estimation ne nécéssitant pas le calcul de f'
   $<$**4 pts**$>$
2. **Méthode des Quadratures Gaussiennes**

   Utiliser la méthode de la quadrature Gaussienne avec 2 termes pour calculer une valeur approchée de I.
   $<$**7 pts**$>$
3. **Méthode hybride analytique itérative/numérique**
   Soit $I(n)$, l'intégrale
   $$I(n) = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\,dx$$
   Avec cette formulation, l'intégrale dont on cherche l'approximation est $I(10) = \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+5}\,dx$.
   (a) On se propose maintenant de résoudre cette intégrale par une méthode analytique itérative. Montrer qu'il existe, pour cette intégrale, une relation de récurence entre $I(n)$ et $I(n-1)$ du type :
   $<$**5 pts**$>$
   $$I(n) + 5I(n-1) = \frac{1}{n}$$
   On se propose de montrer dans cet exercice ce que vous avez constatez en Travaux Pratique, i.e., que la relation de récurence inverse (i.e., $I(n) = g[I(n+1)]$) est beaucoup plus stable que la relation de récurence directe (i.e., celle partant de I_0, et qui calcule I_1, I_2, etc.).
   (b) Rappeler ce qu'est la stabilité pour un algorithme numérique itératif.
   $<$**3 pts**$>$
   (c) Retrouver la relation itérative inverse $I(n) = g(I(n+1))$.
   $<$**4 pts**$>$
   (d) En considérant qu'à chaque étape de cette relation itérative inverse, on devra prendre en compte la propagation des erreurs générées par la fonction $g(x)$; montrer que cette relation itérative inverse conduit à un calcul itératif stable, contrairement à la relation itérative utilisée dans le sens directe (de la question (a)).
   $<$**8 pts**$>$
   (e) En considérant que l'on prenne la relation itérative inverse dont on a montré à la question précédente qu'elle était plus stable numériquement. Quelle valeur pourrait on prendre pour amorcer cette relation itérative inverse ?
   $<$**2 pts**$>$

Réponse

1(a)

On obtient, par la méthode de Simpson (1/3), puisque $h = \frac{(1-0)}{4} = \frac{1}{4}$ (pour 4 intervalles, i.e., pour cinq points équirépartis entre les bornes $[0,1]$ d'intégration)

$$
\begin{aligned}
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &= (1/12)\Big(f(0)+4f(0.25)+2f(0.5)+4f(0.75)+f(1)\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx (1/12)\Big(0+4(1.8165\times10^{-7})+2(1.7756\times10^{-4})+4(9.7936\times10^{-3})+(0.1667\Big),\\
I_{\text{Simpson }(1/3),4} &\approx 0.01719
\end{aligned}
$$

<6 pts>

1(b)

• **Approximativement** : Une quadrature simple pour la méthode de Simpson 3/8 nécéssite 3 intervalles entre $[0,1]$, donc un pas de $h=1/3$ et une précision en $h^5=\frac{1}{3^5}$. On a de plus une précision en $h^4=\frac{1}{4^4}$ pour la méthode de Simpson (1/3) composites. Comme $4^4>3^5$, on a donc un léger facteur de gain en précision pour la méthode de Simpson 1/3 composite utilisant 4 intervalles de $(4^4/3^5)\approx 1.05$.

<4 pts>

Nota : Si on veut être un peu plus précis en prenant la constante devant le h, on arrive à un facteur de gain en précision de $\frac{3/80}{1/180}\times(4^4/3^5)\approx 7$.

2

En faisant le changement de variable $x=\frac{1}{2}(t+1)$ ou $t=2x-1$, $(dx=(1/2)dt)$, **<1 pt>**
nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x^{10}}{x+5}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1024}\int_{-1}^{1}\frac{(t+1)^{10}}{[(t+1)/2]+5}\,dt \qquad \textbf{< 2 pts >}\\
&= \frac{1}{2048}\times\left(\frac{\Big((-\frac{\sqrt{3}}{3})+1\Big)^{10}}{[(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1)/2]+5}+\frac{\Big((\frac{\sqrt{3}}{3})+1\Big)^{10}}{[(\frac{\sqrt{3}}{3}+1)/2]+5}\right) \qquad \textbf{< 2 pts >}\\
&\approx 0.0160 \qquad \textbf{< 2 pts >}
\end{aligned}
$$

3(a)

Par simple calcul, on trouve

$$
I(n)+5\,I(n-1)=\int_0^1\frac{x^n+5\,x^{n-1}}{x+5}\,dx=\int_0^1\frac{x^{n-1}(x+5)}{x+5}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}\,dx=\Big[\frac{x^n}{n}\Big]_0^1=\frac{1}{n}
$$

<5 pts>

3(b)

Un algorithme est numériquement stable si une erreur, une fois générée, ne croît pas trop durant le calcul itératif. Autrement dit, un algorithme (itératif) est numériquement stable si il n'est pas trop sensible ou n'amplifie pas trop les erreurs numériques et si (en conséquence) l'algorithme converge finalement vers un résultat qui sera entaché d'une erreur numérique du même ordre de grandeur que l'erreur qui entache les données initiales. Dans le cas contraire, un algorithme itératif instable divergera à cause d'une trop grande amplification des erreurs.

<3 pts>

3(c)

$$
I(n)+5\,I(n-1)=\frac{1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad 5\,I(n-1)=\frac{1}{n}-I(n)\quad\Leftrightarrow\quad I(n-1)=\frac{1}{5n}-\frac{I(n)}{5}
$$

et par translation d'indice : $\quad I(n)=\dfrac{1}{5(n+1)}-\dfrac{I(n+1)}{5}$

<**4 pts**>

3(d)

En considérant la relation itérative directe et chaque étape de cette suite itérative comme le résultat de la fonction $g_n(x) = \frac{1}{n} - 5\,x$, et en estimant la propagation d'erreur donnée par l'approximation de Taylor de la fonction g_n au premier ordre, on a :

$$\Delta g_n(x) = |-5|\,\Delta_x$$

Soit une amplification d'erreur par un facteur 5 à chaque itération de cette suite ! et donc l'erreur initiale sur I_0 (i.e., ΔI_0) est propagée à toute les itérations de cette suite et par cumul d'erreurs :

$$\Delta I_n = 5\Delta I_{n-1} = 5^2 \Delta I_{n-2} = \ldots = 5^n \Delta I_0 \qquad \text{jusqu'à une instabilité complète !}$$

En utilisant la relation itérative inverse, par contre, à chaque itération de $h_n(x) = \frac{1}{5(n+1)} - \frac{x}{5}$, la propagation d'erreur de la fonction h_n au premier ordre, est $\Delta h_n(x) = |1/5|\,\Delta_x$, soit une atténuation d'erreur par un facteur 5 à chaque itération de cette suite : $\Delta I_n = 5^{-1}\Delta I_{n+1} = 5^{-2}\Delta I_{n+2} = \ldots = 5^{-n}\Delta I^n$ pour une stabilité à toute épreuve (même si on part avec une valeur pour I_n extrêmement bruitée) !

<**8 pts**>

Nota : Cette relation itérative inverse est même auto-correctrice, si on part avec une valeur de I_n exagérement fausse, voire même complétement abérante, cette relation convergera vers le bon résultat si le nombre d'itération reste suffisement grand.

3(e)

Vu que $I(n) + 5I(n-1) = \frac{1}{n}$, pour n assez grand on pourrait amorcé cette relation itérative inverse par une valeur de $I(n+1)$ nulle.

<**2 pts**>

Nota : Cette relation itérative inverse auto-correctrice nous donne :

si on part de $I(12) = 0.0$ ▷ $I(10) \approx 0.0148484848$
si on part de $I(13) = 0.0$ ▷ $I(10) \approx 0.0154638695$
si on part de $I(20) = 0.0$ ▷ $I(10) \approx 0.0153675496$
si on part de $I(10000) = 0.0$ ▷ $I(10) \approx 0.0153675504$

En détaillant les calculs en partant de $I(13) = 0.0$, on a $I(13) = 0.0$, $I(12) = 0.0153846154$, $I(11) = 0.0135897436$ et $I(10) = 0.0154638695$.

On obtient en partant de $I(13) = 0$ (i.e., une valeur très approximée, voire fausse de $I(13)$), et en utilisant 3 itérations de notre relation itérative inverse auto-correctrice, une exellente approximation de notre intégrale à 10^{-4} près !

IV. Résolution d'Équation Différentielle (19 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \frac{-t}{y(t)} \tag{2}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t=0) = 5$.

(a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.3$. Calculer seulement $y_1 = y(0.3)$ et $y_2 = y(0.6)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins cinq décimales).
<5 pts>

(b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.3$. Calculer seulement $y(0.3)$ et $y(0.6)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins quatres décimales).
<5 pts>

(c) Montrer qu'une solution analytique de l'équation différentielle (2) est du type $y(t) = \sqrt{K - t^2}$ et déterminer la constante K en fonction des données que vous disposez.
<4 pts>

(d) Trouverais t-on les mêmes valeurs pour $y(0.3)$ et $y(0.6)$ si on utilisait la méthode du point milieu plutôt que la méthode d'Euler modifiée ? Vous pouvez répondre à cette question sans nécessairement faire de calculs mais en justifiant clairement votre réponse.
<5 pts>

Réponse

1(a)

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.3$ et $y_0 = 5$

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(-\frac{t_n}{y_n}\Big)$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	5.00000
1	0.3	5.00000
2	0.6	4.98200

<4 pts>

1(b)

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\left(-\frac{t_n}{y_n}\right)}_{f(t_n,y_n)} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big)$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	-	5.0000_0
1	0.2	5.0000_0	4.9910_0
2	0.4	4.9729_6	4.9638_8

<4 pts>

1(c)

La vérification est immédiate

$$\text{si} \quad y(t) = \sqrt{K - t^2} \quad \text{alors} \quad y'(t) = -\frac{2\,t}{2\sqrt{K - t^2}} = -\frac{t}{\sqrt{K - t^2}} = -\frac{t}{y(t)}$$

Il reste à déterminer la constante K, que l'on trouve grâce aux conditions initiales données dans l'énoncé $y_0 = y(t=0) = 5$.

$$y_0 = y(t=0) = 5 = \sqrt{K} \quad \text{donc} \quad K = 5^2 = 25$$

<4 pts>

Nota : On peut vérifier maintenant la précision des deux méthodes itératives précédentes en calculant les vraies valeurs en $y(0.3)$ et $y(0.6)$. En effet, on a analytiquement $y(0.3) = 4.9909_{91885}$ et $y(0.6) = 4.9638_{69458}$.

1(d)

Non la méthode du point milieu ne nous donnerait pas les mêmes estimations de $y(0.3)$ et $y(0.6)$ puisque $y(t)$, la fonction qui est solution de l'équation différentielle (2) n'est pas une quadratique. En effet, on a vu en cours que, dans le cas d'une quadratique, ces estimations seraient les mêmes pour une raison géométrique ; la pente au point milieu d'un interval dans lequel se trouve une quadratique quelconque (et dont le principe de la relation itérative de la méthode du point milieu est basé car on se déplace itérativement selon cette pente) est égal à la moyenne des pentes de la quadratique au début et à la fin de cet intervalle (principe du déplacement de la relation itérative de Euler modifié).
<5 pts>

Nota : On aurait put le montrer expérimentalement en calculant ces estimations $y(0.2)$ et $y(0.4)$ par la méthode du point milieu

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+0.5}, y_{n+0.5}) = y_n + h\Big(-\frac{t_{n+0.5}}{\tilde{y}_{n+0.5}}\Big)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{y}_{n+0.5} = y_n + \frac{h}{2}\Big(-\frac{t_n}{y_n}\Big)$$

On aurait trouvé :

n	t_n	$\tilde{y}$	y_n
0	0.0	-	5.00000
1	0.3	5.00000	4.99100
2	0.6	4.98198	4.96390