# EXAMEN FINAL

*Max Mignotte*

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
*E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca*

**date :** *02/05/2013*

| | |
|---|---|
| I ..................... | Moindres Carrés (37 pts) |
| II .................... | Résolution de Systèmes d'Équations Non-Linéaires (21 pts) |
| III ................... | Intégration Numérique (26 pts) |
| IV ................... | Résolution d'Équation Différentielle (21 pts) |
| V .................... | Résolution de système d'Équations Différentielles (13 pts) |
| Total ................ | 118 points |

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

## I. Moindres Carrés (38 pts)

On dispose de $N$ mesures (ou données) expérimentales $[x_i, y_i = y(x_i)]$, théoriquement distribuées selon la fonction de répartition (ou fonction de distribution cumulative) de la loi de distribution de Weibull, qui, on le rappelle (cf. IntraH13), peut être exprimée (pour $x \geq 0$) par la relation

$$y\,(x) = 1 - \exp\Big(-\frac{x^c}{\alpha^c}\Big) \tag{1}$$

avec les paramètres $[c, \alpha]$ qui sont respectivement les paramètres de *forme* et d'*échelle* de cette distribution cumulative. Dans le $\mathrm{TP}_{[1]}$, vous avez estimé les paramètres $[c, \alpha]$ de cette distribution (loi de Weibull et fonction de répartition associée) au sens du critère du Maximum de Vraisemblance (à l'aide d'une approximation successive utilisant la relation itérative de Newton).
Le but de cet exercice est maintenant de chercher à estimer les paramètres $[c, \alpha]$ de cette fonction de répartition (Eq. (1)) qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées à partir du tableau de $N = 4$ données suivantes :

| $x_i$ | 0.10 | 0.50 | 1.70 | 2.00 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i = y(x_i)$ | 0.16 | 0.39 | 0.61 | 0.84 |

1. **Régression Linéaire**
   Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrées, on va d'abord essayer de se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster (linéairement) à une droite d'équation : $Y = aX + b$

   (a) En se souvenant du fait que $\ln\big(\ln[\exp(x^c)]\big) = c\ln(x)$, trouver ce changement de variable et exprimer ensuite les paramètres $(a, b)$ de cette droite en fonction des paramètres $[c, \alpha]$ de cette fonction de répartition.
   **$<$9 pts$>$**

   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner l'expression du résidu $R(a, b)$ (ou écart quadratique) qui serait minimisé par cette regression linéaire par la méthode des moindres carrés.
   **$<$3 pts$>$**

   (c) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients $a$ et $b$.
   **$<$3 pts$>$**

   (d) Trouver les coefficients $a$ et $b$ en résolvant ces équations normales par la méthode du pivot de Gauss (sans pivotage).
   **$<$8 pts$>$**

   (e) En déduire les paramètres $\alpha$ et $c$ de cette fonction de répartition.
   **$<$4 pts$>$**

2. **Régression Non-Linéaire**
   Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variable pour se ramener au cas linéaire comme précedemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[c, \alpha]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidue $R(c, \alpha) = \sum_{i=1}^{N}(y(x_i) - y_i)^2$, c'est à dire une régression non-linéaire.

   (a) Est ce que l'estimation des paramètres $[c, \alpha]$ donnée par cette méthode sera identique ou différente de celle de la méthode précédente (regression linéaire). Justifiez bien votre réponse.
   **$<$3 pts$>$**

   (b) Donner le système d'équations équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[c, \alpha]$ au sens des moindres carrés de cette fonction de répartition.
   **$<$7 pts$>$**

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

L'énoncé nous aide en nous faisant remarquer que $\ln\big(\ln[\exp(x^c)]\big) = c\ln(x)$ qui, avec le changement de variable $X = \ln(x)$, permettrait de trouver facilement le coefficient directeur de la droite après changement de variable, i.e., le "c" jouant le rôle du "a" dans l'équation : $Y = aX + b$.
Il nous reste à considérer le changement de variable adéquat pour le $Y$, nous permettant d'isoler, en second membre, une exponentielle positif. Cela peut se faire facilement en re-exprimant l'Eq. (1) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} y\,(x) - 1 &= -\exp\Big(-\frac{x^c}{\alpha^c}\Big) \\ 1 - y\,(x) &= \exp\Big(-\frac{x^c}{\alpha^c}\Big) \\ \frac{1}{1 - y\,(x)} &= \exp\Big(\frac{x^c}{\alpha^c}\Big) \end{aligned}$$

En posant donc : $Y = \ln\big(\ln(\frac{1}{1-y\,(x)})\big)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\ln\Big[\ln\Big(\frac{1}{1-y\,(x)}\Big)\Big]}_{Y} &= \ln\Bigg(\ln\Big[\exp\Big(\frac{x^c}{\alpha^c}\Big)\Big]\Bigg) = c\ \ln\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) = c\underbrace{\ln(x)}_{X} - c\ln(\alpha) \\ Y &= \underbrace{c}_{a}X + \Big[\underbrace{-c\ln(\alpha)}_{b}\Big] = aX + b \end{aligned}$$

On obtient donc, après le changement de variable $Y = \ln\big(\ln(\frac{1}{1-y\,(x)})\big)$ et $X = \ln(x)$, un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données ($Y = aX + b$) avec les paramètres $a = c$ et $b = -c\ \ln(\alpha)$.

**<9 pts>**

Nota : Du fait des propriétés du ln, le changement de variable $Y = \ln\big(-\ln[1 - y\,(x)]\big)$ est identique.

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Après changement de variable, le résidu que l'on cherchera à minimiser par cette technique des moindres carrés est

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\Big(Y_i - (a\,X_i + b)\Big)^2$$

**<3 pts>**

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

Les paramètres $(a, b)$ sont solution des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours) :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\,Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix}$$

**<3 pts>**

$\boxed{\textbf{1(d)}}$

Avec le changement de variable $Y = \ln\big(\ln(\frac{1}{1-y\,(x)})\big)$ et $X = \ln(x)$, on trouve les données suivantes

| $X_i$ | $-2.303$ | $-0.693$ | $0.531$ | $0.693$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_i$ | $-1.747$ | $-0.705$ | $-0.060$ | $0.606$ |

<2 pts>

et le système d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} 6.546 & -1.772 \\ -1.772 & 4.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.900 \\ -1.906 \end{pmatrix}$$

<2 pts>

puis par une opération élémentaire ; $R_2 = R_2 - \frac{(-1.772)}{(6.546)} R_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 6.546 & -1.772 \\ 0 & 3.520 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.900 \\ -0.578 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $\boxed{b \approx -0.164}$, puis, $6.546a - 1.772 \times -0.162 = 4.9$, i.e., $\boxed{a \approx 0.704}$

<4 pts>

**1(e)**

En utilisant le fait que : $\begin{cases} a &= c \\ b &= -c\ \ln(\alpha) \end{cases}$

On obtient facilement, d'abord $c = a = 0.704$, puis $\alpha = \exp(-\frac{b}{a}) = \exp(\frac{0.162}{0.71}) \approx 1.264$

<4 pts>

**2(a)**

L'estimation de $[c, \alpha]$ sera forcement différente car dans la question 1. et 2. on cherchera à minimiser respectivement les résidus différents $R_1$ et $R_2$ suivants pour estimer $[c, \alpha]$

$$\begin{aligned} R_1(c,\alpha) &= \sum_{i=1}^{N} \Big( \ln\big(\ln(\frac{1}{1-y_i})\big) - (c\ \ln x_i - c\ \ln \alpha) \Big)^2 \\ R_2(c,\alpha) &= \sum_{i=1}^{N} \Big( y_i - (1 - \exp\Big(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\Big) \Big)^2 \end{aligned}$$

<3 pts>

Nota : Tous changement de variables se fait au prix d'une modification de la structure des erreurs. Ainsi le résidu dans les deux cas est différent bien que le critère de régression (les moindre carrés) soit identique dans les deux cas.
Comparativement à une régression linéaire, la présence d'une non-linéarité donne indirectement plus de poids à certaines données.

**2(b)**

Trouver les paramètres $[c, \alpha]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[c, \alpha]$ pour que $R_2 = R(c, \alpha)$ soit minimal, c'est à dire tel que $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial c} = 0$ et $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$.

En se souvenant d'une part que $\Big(\exp\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \cdot \exp\big(u(x)\big)$ et $\big(a^x\big)' = \ln(a) \cdot a^x$, la dérivation par rapport au paramètre $c$ donne

$$\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{N} 2 \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c \ln\Big(\frac{x_i}{\alpha}\Big) \exp\Big(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\Big) \Big[ y_i - 1 + \exp\Big(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\Big) \Big] = 0$$

L'équation normale qui se déduit de $\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ est

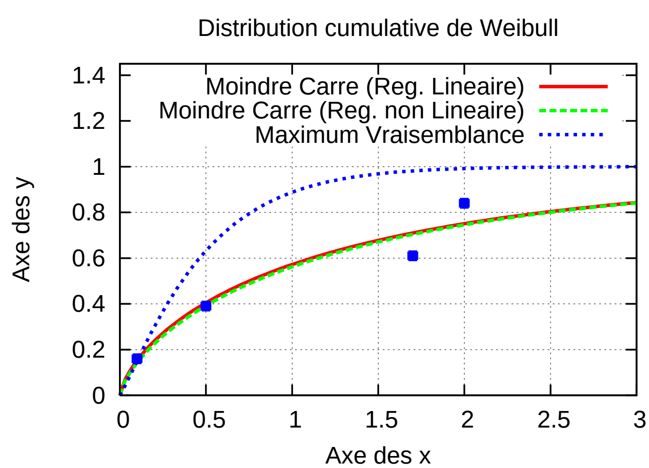
$$\frac{\partial R(c,\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{N} 2\left(\frac{c x_i^c}{\alpha^{c+1}}\right) \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\left[y_i - 1 + \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\right] = 0$$

Nous trouvons donc le système d'équations non-linéaires normales suivantes

$$\begin{cases} F_1(c,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^c \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\left[y_i - 1 + \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\right] = 0 \\ F_2(c,\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{c x_i^c}{\alpha^{c+1}}\right) \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\left[y_i - 1 + \exp\left(-\frac{x_i^c}{\alpha^c}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

**<7 pts>**

Nota : On peut constater qu'il est beaucoup plus difficile de trouver une solution à ce système d'équations non-linéaires que le système linéaire de la question 1(d). Comme il est préciser en cours (chap. 3 page 65), on pourrait essayer une méthode de Newton-Raphson avec une matrice jacobienne dont les dérivées sont approchées avec des formules numériques ou encore une méthode de type point fixe après avoir re-arrangé le système $F_1(c,\alpha) = 0$ et $F_2(c,\alpha) = 0$ en $c = G_1(c,\alpha)$ et $\alpha = G_2(c,\alpha)$ mais dans ces deux cas, il faudrait que la convergence soit assurée ...
Comme dans cet exemple, on a peu de paramètres, on peut faire une recherche exhaustive, c'est à dire calculer tous les résidus pour toutes les valeurs de $[c,\alpha]$ comprise entre $[0,2]$ par pas (précision) de $10^{-3}$, et prendre le couple de paramètres assurant le résidu minimal (cf. 2(a)). Dans notre cas on trouve (après 4 secondes de calcul), les valeurs $[c = 0.729, \alpha = 1.297]$ deux valeurs différentes mais pas trop loin des valeurs obtenues par regression linéaire qui sont $[c = 0.704, \alpha = 1.264]$. L'estimation reste très différente de l'approche au Maximun de vraisemblance (MV) vu en TP$_{[1]}$, pour laquelle, avec ses 4 mesures (seulement !), on obtient $[c = 0.50, \alpha = 1.13]$.




Pour obtenir l'estimation de $y(x_i)$, nécessaire à l'ajustement par moindres carrés de cette loi cumulative par rapport à une estimation du MV (où $y(x_i)$ joue le rôle de proportion dans la loi de distribution de Weibull), on utilise l'estimateur du rang médian $y(x_i) = (i - 0.3)/(N + 0.4)$, où $i$ est le rang (ou numéro) de la donnée et $N$ le nombre de données utlisées.

---

**II. Résolution de Systèmes d'Équations Non-Linéaires** (21 **pts**)

Considérons le système d'équations non linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x + \cos(y) & = & 1 \\ \cos(x) + 3y & = & 4 \end{array}\right.$$

1. Utiliser la méthode du point fixe à plusieurs variables pour trouver une approximation de la solution de ce système d'équations non-linéaires. On utilisera une stratégie de type Gauss-Seidel et on partira de $(x^{[0]} = 0, y^{[0]} = 0)$, et on calculera 3 itérations (i.e., jusqu'à $(x^{[3]}, y^{[3]})$). Dire aussi quelle est la différence entre une stratégie de type Gauss-Seidel et une stratégie du type Jacobi.
**<8 pts>**
2. En vous aidant d'un graphique ou d'un encadrement ou autre, montrer que le système d'équations a une solution dans l'intervalle $x \in [0, 1]$ et $y \in [1, 2]$ et montrer que la convergence de la suite itérative définie à la question précédente est assurée.
**<7 pts>**
3. Écrire la relation itérative de Newton (avec les termes de la matrice jacobienne calculée analytiquement) pour résoudre ce système d'équation non-linéaires (Nota : n'inverser pas la matrice Jacobienne).
**<6 pts>**

---

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1.}}$

On doit donc re-arranger le système pour le mettre sous la forme $x = G_1(x, y)$ et $y = G_2(x, y)$ puis on itère ces deux équations, avec une stratégie du type Gauss-Seidel, c'est à dire en utilisant l'information la plus récente (pour obtenir une convergence plus rapide)

$$\left\{\begin{array}{rcr} x^{[n+1]} & = & (1 - \cos(y^{[n]})/3 \\ y^{[n+1]} & = & (4 - \cos(x^{[n+1]})/3 \end{array}\right.$$

**<4 pts>**

En partant de $(x_0 = 0, y_0 = 0)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} x^{[1]} = 0 & : & y^{[1]} = 1 \\ x^{[2]} = 0.153 & : & y^{[2]} = 1.003 \\ x^{[3]} = 0.154 & : & y^{[3]} = 1.004 \end{array}$$

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{2.}}$

La première équation peut s'écrire $x = (1/3)(1 - \cos(y))$. Comme $-1 < \cos(y) < 1$, la première équation définira une courbe qui évoluera entre $0 < x < (2/3)$. La deuxième équation peut s'écrire $y = (1/3)(4 - \cos(x))$. Comme $-1 < \cos(x) < 1$, la deuxième équation définira une courbe qui évoluera entre $1 < y < (5/3)$. Ces deux courbes s'intersecteront donc entre $x \in [0, (2/3)]$ et $y \in [1, (5/3)]$ et donc entre $x \in [0, 1]$ et $y \in [1, 2]$.
**<3.5 pts>**

De plus, en utilisant la forme $x = G_1(x, y)$ et $y = G_2(x, y)$ écrit 10 lignes plus haut, on a, $\forall x$ et $\forall y$

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial x}\right| = \frac{1}{3}|\sin(x)| < 1 \quad \forall x \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial G_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial y}\right| = \frac{1}{3}|\sin(y)| < 1 \quad \forall y$$

Ces deux inégalités sont vrais pour l'intervalle $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 2]$ dans lequel on a une solution et le premier élément de la suite $(x^{[0]} = 0, y^{[0]} = 0)$ donc la convergence est assurée.
**<3.5 pts>**

$\boxed{\textbf{3.}}$

Soit les deux équations $F_1(x^{[n]}, y^{[n]}) = 3x^{[n]} + \cos(y^{[n]}) - 1 = 0$ et $F_2(x^{[n]}, y^{[n]}) = \cos(x^{[n]}) + 3y^{[n]} - 4 = 0$, la relation itérative de Newton-Raphson, permettant d'obtenir une nouvelle estimation $(x^{[n+1]}, y^{[n+1]})$, en fonction d'une estimation précédente $(x^{[n]}, y^{[n]})$ est donnée par le relation itérative

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x^{[n+1]} \\ y^{[n+1]} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^{[n]} \\ y^{[n]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x^{[n]},y^{[n]})}{\partial x^{[n]}} & \frac{\partial F_1(x^{[n]},x^{[n]})}{\partial y^{[n]}} \\ \frac{\partial F_2(x^{[n]},y^{[n]})}{\partial x^{[n]}} & \frac{\partial F_2(x^{[n]},x^{[n]})}{\partial y^{[n]}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1(x^{[n]}, y^{[n]}) \\ F_2(x^{[n]}, y^{[n]}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^{[n]} \\ y^{[n]} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -\sin(y^{[n]}) \\ -\sin(x^{[n]}) & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} F_1(x^{[n]}, y^{[n]}) \\ F_2(x^{[n]}, y^{[n]}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**<6 pts>**

---

## III. Intégration Numérique (26 pts)

Soit l'intégrale suivante

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx$$

1. **Questions relatives au TP$_{[3]}$**

   (a) Dans la première Question du TP$_{[3]}$, on vous demandait de calculer une valeur approchée de $I (= \pi)$ en utilisant la méthode d'intégration des Trapèzes (quadratures composites) avec une précision de $10^{-8}$ (erreur $< 10^{-8}$) et de donner *expérimentalement* le nombre d'intervalles permettant de réaliser cette estimation.
   Exprimer $n$, le nombre d'intervalles minimales permettant de trouver une valeur approchée de $I$ avec une précision de $10^{-8}$, **littéralement** en fonction de tous les autres variables de la formule (la plus précise) de la borne d'erreur commise par cette méthode des Trapèzes.
   **<6 pts>**

   (b) i. Dans notre cas, quel est le problème qui nous empêche de trouver théoriquement une borne inférieure intéressante du nombre d'intervalles minimales permettant de réaliser l'estimation de $I$ à $10^{-8}$ près ?
   **<2.5 pts>**

   ii. Indiquer ce que cela veut dire concrètement pour l'estimation de $I$ (e.g., où sont localisées principalement les erreurs numériques d'estimations dans le calcul approximé de $I$ ?).
   **<2.5 pts>**

   (c) Dans la deuxième Question du TP$_{[3]}$, on vous demandait de calculer une valeur approchée de $I$ en utilisant la méthode de Romberg (i.e., la méthode des Trapèzes et autant d'extrapolations de Richardson qu'il est possible de faire) avec 1024 intervalles (divisant uniformément le domaine d'intégration $[0; 1]$).

   i. Trouver l'erreur théorique grossière (en tant que puissance de $h$ = "l'équidistance des abscisses des points de données") que l'on devrait faire théoriquement avec cette méthode d'intégration de Romberg.
   **<5 pts>**

   ii. Quelles pourraient être la ou les raisons numériques ou autres qui pourraient faire que l'on obtienne pas expérimentalement la précision théorique trouvée précédemment ? Justifier bien votre réponse.
   **<5 pts>**

   (d) Dans la troisième Question du TP$_{[3]}$, expliquer pourquoi l'une des deux méthodes itératives est plus stable numériquement et plus précise que l'autre ?
   **<5 pts>**

**Réponse**

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

La (plus précise) formule d'erreur dans le cas des trapèzes composites s'écrit (avec $a = 0$ et $b = 1$, les bornes de l'intégrale)

$$|E| = \frac{h^2}{12}\,(b-a)\,|f''(\xi)| = \frac{h^2}{12}\,|f''(\xi)| \qquad\qquad \xi \in [0\ 1]$$

Cette erreur doit être bornée par $10^{-8}$ (i.e., donc pour avoir une estimation avec 8 cse car $10^{-8} < 0.5 \times 0^{-8}$). Cela nous permet d'écrire

$$\frac{h^2}{12}\,(1-0)\ \max_{\xi\in[0\ 1]} |f''(\xi)|\ <\ 10^{-8}$$

Sachant que $h = 1/n$ on a donc littéralement $n$ en fonction de tous les autres variables de la formule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} \quad &< \quad \frac{12\cdot 10^{-8}}{\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)|}\,, \\
n \quad &> \quad \sqrt{\frac{\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi)|}{12\times 10^{-8}}}
\end{aligned}$$

Avec pour la dérivée seconde de $f$

$$\begin{aligned}
f(x) = 4\sqrt{1-x^2} \quad &= \quad 4\,(1-x^2)^{1/2} \\
f'(x) \quad &= \quad -4\,x(1-x^2)^{-1/2} \\
f''(x) \quad &= \quad -4\,(1-x^2)^{-1/2} - 4\,x^2(1-x^2)^{-3/2} = -4\,(1-x^2)^{-1/2}\left\{1 + x^2(1-x^2)^{-1}\right\}
\end{aligned}$$

**<6 pts>**

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

**i.** On comprend ici que le problème qui nous empêche de trouver une borne inférieure intéressante du nombre d'intervalles minimales réalisant l'estimation de $I$ à $10^{-8}$ près est que $\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi = 1)| = \infty$.

**<2.5 pts>**

**ii.** La remarque précédente veut dire que, concrètement, La plupart des erreurs numériques, lors de l'estimation de $I$ sont donc concentrées vers la fin de l'intégration ($x = 1$).

En plus, notons aussi que vers la fin de l'intégration numérique, non seulement le changement de pente important de $f$ vers la fin de l'intégration ($x = 1$) engendre une borne d'erreure théorique assez grande et inexploitable ($\max_{\xi\in[0,1]}|f''(\xi = 1)| = \infty$), mais en plus, s'ajoute à cela le problème de la soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux ! (dans $\sqrt{1-x^2}$ quand $x \to 1$).

**<2.5 pts>**

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

**i.** Dans notre cas, 1024 intervalles entre $[0, 1]$, on trouve $h = 1/1024$. Avec 1024 intervalles, on peut faire $1 + 10$ ($= 1 + [\log(1024)/\log(2)]$ étapes d'extrapolation de Richardson qui sera, à la première étape, de l'ordre de $h^2$ et sauter d'étape en étape en puissance paire de $h$ pour arriver, théoriquement, à la 11-ième étape d'extrapolation de Richardson, à une erreur en $O(h^{22})$, c'est à dire $(1/1024)^{22} \approx 6 \times 10^{-67}$ !

**<5 pts>**

**ii.** On ne trouve pas malheureusement cette borne d'erreur théorique ; La première raison est qu'il s'agit d'une approximation grossière de l'erreur. En particulier, les constantes, dans cette formule ou l'on garde seulement la puissance de $h$ ne sont plus présentes. En second lieu, le problème de la dérivée n-ième de $f$ égale à l'infinie pour $x = 1$ subsiste toujours comme dans la question 1(b). En plus de tout cela, 3 problèmes d'erreur numérique, dont un majeur, s'ajoutent à tous cela.

En effet, rappelons que la formule d'extrapolation de Richardson consiste à combiner une formule numérique $f_1$ (ou son estimation) avec une formule numérique moins précise $f_2$ (ou son estimation moins précise) pour créer, au final, une formule numérique $f$ plus précise (que la plus précise des deux premières formules) grâce à la formule (avec $n$, l'ordre d'approximation de la formule la plus précise des deux) :

$$f = f_1 + \frac{1}{2^n - 1}\big(f_1 - f_2\big)$$

(*) Dans cette formule, l'erreur numérique qui gène considérablement la précision que l'on devrait obtenir théoriquement est l'annulation de chiffres significatif exactes, à cause du problème lié à la soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux $(f_1 - f_2)$. Notons que pour le problème du TP$_{[3]}$, il s'agit d'une erreur d'affectation qui pourrait s'atténuer si on utilise des *"long double"*.

(*) A ce problème s'ajoute aussi le problème d'erreur numérique cité à la question 1(b) en Nota concernant le problème de la soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux dans l'expression $\sqrt{1 - x^2}$ quand $x \to 1$.

(*) Et enfin, plus le nombre d'étapes de l'extrapolation de Richardson est importante, (comme ici dans laquelle il y a 11 étapes), plus le processus d'extrapolation de Richardson fait appel à l'addition de nombres d'ordre de grandeur différentes, source encore d'erreur numérique ...

Bref, en résumé, la méthode d'extrapolation de Richardson, lorsqu'on l'utilise avec beaucoup d'itérations, est pas très bonne numériquement. Notons qu'il s'agit toutefois, dans notre cas (estimation de $I$), d'erreur d'affectation qui pourrait s'atténuer si on utilise des *long double* ou les futurs ordinateurs 128 bits ...
**<5 pts>**

$\boxed{\textbf{1(d)}}$

Avec la première suite, le problème se passe à la 15-ième itération. $\pi$ est ensuite estimé par $6 \times 2^n\, r_n$. Pour la suite $r_n$ les différentes valeurs de la suite sont $r_0 = 1/\sqrt{3}$, $r_1 \approx 0.2679$, $r_2 \approx 0.1379$, ..., $r_{10} \approx 5.11 \times 10^{-4}$, et tend ensuite rapidement vers 0. De ce fait, $r_{n+1} = \sqrt{r_n^2 + 1} - 1/r_n$ fera apparaître, au numérateur, la soustraction de deux nombres approximées quasi-égaux qui est donc la source de notre problème numérique majeur et qui explique pourquoi cette méthode itérative est moins stable numériquement et moins précise que la deuxième, qui est mathématiquement équivalente et pour lequel ce problème de soustraction de deux nombres approximées quasi-égaux n'apparaît pas. Finalement, le numérateur et le dénominateur tendant vers 0, tous les deux au fil des itérations, amplifieront cette catastrophe numérique ...
**<5 pts>**

---

### IV. Résolution d'Équation Différentielle (21 pts)

Soit l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = f(t, y(t)) = y^2(t) \tag{2}$$

1. Dans cette première partie, on supposera que l'on a la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = y(0) = 1$.
   (a) Résoudre numériquement l'équation différentielle (2) avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
   **<4 pts>**

(b) Résoudre numériquement l'équation différentielle (2) avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$, (donner aussi les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
**<4 pts>**

(c) Donner le système d'équations que l'on devrait résoudre pour obtenir $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ par la méthode des différences finies si on utilisait une approximation numérique d'ordre 2 (ordre $O(h^2)$) pour approximer $y'(t)$ dans l'équation (2) (on utilisera la connaissance des conditions limites $y_0 = y(0.0) = 1$ et $y_3 = y(0.6) = 2.5$).
**<4 pts>**

(d) Trouver la solution analytique de l'équation différentielle (2).
**<4 pts>**

2. Dans cette seconde partie, on supposera que l'on recherche une fonction $y(t)$, solution de l'équation différentielle (2), finissant avec la condition limite $y_2 = y(0.4) = 2$ et commencant avec une condition initiale inconnue ; $y_0 = y(0.0)$.
Résoudre numériquement cette équation différentielle avec la méthode d'Euler combinée avec une itération de la méthode de tir (et toujours un pas $h = 0.2$) pour estimer $y_0 = y(0.0)$ et $y_1 = y(0.2)$.
Est-ce qu'une itération de la méthode de tir sera suffisante pour trouver $y(t)$, solution de l'éq. (2), finissant avec la condition limite $y_2 = y(0.4) = 2$ ? Justifiez bien votre réponse.
**<5 pts>**

---

**Réponse**

**1(a)**

Par le méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h\, y_n^2$$

**<1 pt>**

Les valeurs de $t_n$ et $y_n$ sont données dans le tableau ci-dessous

| $n$ | $t_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.0 | 1.000 |
| 1 | 0.2 | 1.200 |
| 2 | 0.4 | 1.488 |

**<3 pts>**

**1(b)**

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\,\underbrace{y_n^2}_{f(t_n,y_n)} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},\tilde{y}_{n+1})\big) = y_n + \frac{h}{2}\big(y_n^2 + \tilde{y}_{n+1}^2\big)$$

**<1 pt>**

Les valeurs de $t_n$, $y_n$ et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci dessous

| $n$ | $t_n$ | $\tilde{y}_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.0 | - | 1.000 |
| 1 | 0.2 | 1.200 | 1.244 |
| 2 | 0.4 | 1.554 | 1.640 |

**<3 pts>**

**1(c)**

En utilisant une formule numérique d'ordre 2 pour approximer $y'(t)$ au temps $t_i$, i.e.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

une discrétisation du temps du style $t_i = t_0 + ih$ avec $h = 0.2$ (et les conditions limites $y_0 = y(t_0) = 1$ et $y_3 = y(t_3) = 2.5$ donnée), on obtient le système de deux équations à deux inconnus $(y_1, y_2)$ suivant (exprimée pour $i = 1, 2$)

$$\begin{cases} y_2 - y_0 &= 2h\, y_1^2 \\ y_3 - y_1 &= 2h\, y_2^2 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} y_2 - 1 &= 0.4\, y_1^2 \\ 2,5 - y_1 &= 0.4\, y_2^2 \end{cases}$$

On obtient un système d'équations non-linéaires.
**<4 pts>**

Nota : On aurait put aussi utiliser l'approximation : $y'_i = \frac{-y_{i+2}+4\,y_{i+1}-3\,y_i}{2h} + O(h^2)$ conduisant au système :

$$\begin{cases} -y_2 + 4\,y_1 - 3 &= 2h \\ -2.5 + 4\,y_2 - 3y_1 &= 2h\,y_1^1 \end{cases}$$

**1(d)**

On a : $\dfrac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$ et en intégrant les deux membres de cette égalité, on trouve $-\dfrac{1}{y(t)} = t + \text{Cst}$ c'est à dire, $-\dfrac{1}{y(t)} = t + \text{Cst}$ et donc, $y(t) = \dfrac{-1}{t + \text{Cst}}$

Et avec la prise en compte de la condition initiale ($y_0 = 1$), on trouve, Cst $= -1$ et $y(t) = \frac{1}{1-t}$.
**<4 pts>**

Nota : Par calcul analytique, on trouve donc, pour la condition initiale $y(t=0) = 1$,

$$y_1 = y(t=0.2) = 1.25 \quad \text{et} \quad y_2 = y(t=0.4) \approx 1.667$$

que l'on peut comparer aux estimations données par la méthode d'Euler et d'Euler modifiée de la question 1(a) et 1(b). En particulier, on peut voir que $y_2 = 1.488$ donnée par Euler simple est estimée approximativement avec une erreur de l'ordre de $h = 0.2$ et $y_2 = 1.640$ donnée par Euler modifiée est estimée approximativement avec une erreur de l'ordre de $h^2 = 0.2^2 = 0.04$.

**2**

• Pour le premier tir, on a le droit d'utiliser les estimations données à la question 1(a), correspondant à la condition initiale $y_0 = 1$ et pour lesquel on a trouvé $y_2 = 1.488$.

• Pour le deuxième tir, prenons $y_0 = 2$, et on trouve immédiatement (en utilisant la relation itérative donnée en 1(a)), $y_1 = 2.8$ et $y_2 = 4.368$.

• La combinaison des deux tirs nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} y^{[3]}(t = 0.4) &= \alpha y^{[1]}(t = 0.4) + (1 - \alpha)\, y^{[2]}(t = 0.4) \\ 2 &= \alpha \times 1.488 \ + \ (1 - \alpha) \times 4.368 \\ \alpha &= 0.8222 \end{aligned}$$

On trouve donc
$$\begin{aligned} y_0 &= 0.8222\, y^{[1]}(0.0) + (0.1778)\, y^{[2]}(0.0) = 0.8222 \times 1.0 + (0.1778) \times 2.0 \approx 1.178 \\ y_1 &= 0.8222\, y^{[1]}(0.2) + (0.1778)\, y^{[2]}(0.2) = 0.8222 \times 1.2 + (0.1778) \times 2.8 \approx 1.484 \end{aligned}$$

Notons que la convergence n'est pas assurée à cause de la non-linéarité de l'équation différentielle. Une itération nous permettra seulement d'avoir une première estimation de $y_0 = y(0.0)$ et $y_1 = y(0.2)$.

**<5 pts>**

**Nota** : Remarquons que le calcul de $y_2 = y(0.4)$, ne fera que re-exprimer l'équation que nous avons utilisée pour trouver $\alpha$, i.e.,

$$y_3 \;=\; 0.8222\, y^{[1]}(0.4) + (0.1778)\, y^{[2]}(0.4) = 0.8222 \times 1.488 + (0.1778) \times 4.368 \approx 2.0$$

Et on tombera forcément sur la condition limite donnée par l'énoncée pour $y(t)$.
Pour vérifier que l'on ne s'est pas trompé, une possibilité consiste à re-calculer, avec la méthode d'Euler à partir de la condition initiale $y_0 = 1.178$.
En prenant $y_0 = 1.178$, et on trouve immédiatement (en utilisant la relation itérative donnée en 1[a]), $y_1 = 1.455$ et $y_2 = 1.890$. Comme l'équation différentielle est non-linéaire, on devrait recommencer la procédure faîte en $\boxed{2}$ avec $y(0.0) \in [1.178 \;\; 2.0]$ et recommencez jusqu'à convergence de $y(0.4) = 2$.

---

## V. Système d'Équations Différentielles (13 pts)

L'oscillateur de Duffing fait partie des systèmes qui permettent d'étudier une dynamique non-linéaire montrant un comportement chaotique. Il correspond à une équation non-linéaire de la forme :

$$x''(t) + \delta x'(t) + \alpha x(t) + \beta x^3(t) \;=\; f\cos(wt)$$

Cette équation diffère formellement de l'équation du mouvement harmonique d'un pendule simple (dans lequel $\beta = \delta = 0$) ou encore de l'oscillateur harmonique en régime forcé par la présence d'un terme non-linéaire en $\beta\, x^3$. Elle fut établie au début du siècle par l'ingénieur Georg Duffing, dans le but de modéliser les vibrations forcées d'une machine industrielle. Dans cette équation, $\delta, \alpha, \beta, f, w$ sont des constantes connues On considérera les conditions initiales $x(0) = 1.0$ et $x'(0) = 1.0$. On vous demande de

1. Ré-écrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   **<4 pts>**
2. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser quelle serait le système de relations itératives qui serait obtenu. On utilisera $\delta = \alpha = \beta = f = w = 1$.
   **<4 pts>**
3. À partir de $x(t = 0) = x_0 = 1.0$, trouver $x(t = 0.2)$ et $x(t = 0.4)$.
   **<5 pts>**

---

**Réponse**

**1.**

En posant, $x'(t) = y(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant

$$\begin{cases} x'(t) &= \; y(t) \\ y'(t) &= \; f\cos(wt) - \alpha x(t) - \beta x^3(t) - \delta y(t) \end{cases}$$

**<3 pts>**

Avec les conditions initiales $x(0.0) = 1.0$ et $y(0.0) = 1.0$.

**<1 pts>**

**2.**

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t_{n+1}) & = & x(t_n) + h\, y(t_n) \\ y(t_{n+1}) & = & y(t_n) + h\Big(f\cos(wt_n) - \alpha x(t_n) - \beta x^3(t_n) - \delta y(t_n)\Big) \end{array}\right.$$

Nota : On peut utiliser ces relations itératives pour résoudre le problème ou utiliser aussi la valeur de $x(t_n)$ la plus récente (i.e., $x(t_{n+1})$ pour optimiser la deuxième relation itérative (ou inversement) avec une approche de type Gauss-Seidel.

**<4 pts>**

$\boxed{\textbf{3.}}$

En se souvenant que la fonction qui nous interesse (solution de l'équation différentielle) est $x(t)$ et en partant des conditions initiales $x(0.0) = 1.0$ et $y(0.0) = 1.0$, on obtient immédiatement pour $h = 0.2$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0.2) & = & 1.0 + 0.2 \times 1.0 = 1.2 \\ y(0.2) & = & 1.0 + 0.2 \times \big(1.0 - 1,0 - 1.0^3 - 1.0\big) = 0.6 \end{array}\right.$$

**<2.5 pts>**

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(0.4) & = & 1.2 + 0.2 \times 0.6 = 1.32 \\ y(0.4) & = & 0.6 + 0.2 \times \big(0.98 - 1.2 - (1.2)^3 - 0.6\big) = 0.0904 \end{array}\right.$$

**<2.5 pts>**

Nota : Pour un jeu de paramètres $\delta, \alpha, \beta, f, w$ et conditions initiales appropriées, on pourrait trouver la courbe suivante illustrant l'évolution du point $(x, y)$ en fonction du temps $t$ :