DIRO
IFT 2425

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *19/03/2013*

I	Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (29 pts)
II	Erreur en Arithmétique Flottante (31 pts)
III	Méthode de la Bissection/Point Fixe/Newton (40 pts)
IV	Interpolation (21 pts)
Total	121 points.

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (29 pts)

1. Soit x une variable aproximée dont l'incertitude s'exprime par la connaissance de son intervalle de confiance $x \in [a\ ,\ b]$. Calculer l'erreur relative $\epsilon_r(x)$ que l'on fait sur cette variable en fonction de a et b.
   <5 pts>
2. La fonction de répartition (ou fonction de distribution cumulative) de la loi de distribution de Weibull (dont vous avez estimé le paramètre de forme c en TP) peut être exprimée (pour $y \geq 0$) par la relation

$$\mathcal{F}(y; c, \alpha) = 1 - \exp\Big(-\frac{y^c}{\alpha^c}\Big)$$

   On désire calculer une valeur de cette fonction de répartition, et on suppose que pour les trois variables de cette formule, on a les mesures approximées et les incertitudes suivantes :

α	$= 1.23$	avec tous les chiffres donnés considérés comme significatif "exact" (cse)
y	$= 1.50$	avec une erreur relative de 1%
c	$\in [1.39\ ,\ 1.40]$	i.e., $'c'$ est une valeur élément de cette intervalle de confiance

   On vous demande de :

   (a) Exprimer, pour chacune de ces trois variables, l'incertitude que l'on a sur elle en la mettant sous la forme $x = x^\star \pm \Delta x$ où $x^\star$ et Δx seront déterminés et en soulignant le nombre de chiffres significatifs "exact" (cse) pour $x^\star$.
   <5 pts>

   (b) Donner l'approximation de la valeur de cette fonction de répartition $\mathcal{F}$, et l'incertitude sur $\mathcal{F}$ (i.e., $\Delta\mathcal{F}$) par la méthode de propagation d'erreur (utilisant l'approximation de Taylor de la fonction au premier ordre)[1].
   <10 pts>

   (c) Quelle est la variable qui engendre ici le plus d'incertitude (ou erreur absolue) sur le résultat final ? Justifier votre réponse.
   <3 pts>

   (d) Peut on utiliser la méthode de la fourchette pour obtenir cette incertitude $\Delta\mathcal{F}$? Si non expliquer clairement pourquoi et si oui, utiliser cette méthode (de la fourchette) pour obtenir l'incertitude résultante $\Delta\mathcal{F}$ (i.e., erreur absolue sur $\mathcal{F}$) que l'on obtiendrait par cette méthode en fonction de $(y_{\min}, y_{\max}, c_{\min}, c_{\max},\ \alpha_{\min}, \alpha_{\max})$, les bornes inf. et sup. de chaque variable incertaine.
   <6 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

$x \in [a\ ,\ b] \Leftrightarrow x = x^\star \pm \Delta x = \frac{a+b}{2} \pm \frac{|b-a|}{2}$, donc, $\epsilon_r(x) = \frac{\Delta x}{|x|} \approx \frac{\Delta x}{|x^\star|} = \frac{\frac{|b-a|}{2}}{\frac{|a+b|}{2}} = \frac{|b-a|}{|a+b|}$.

$x \in [a\ ,\ b] \Leftrightarrow \epsilon_r(x) = \frac{|a-b|}{|a+b|}$

<5 pts>

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$

[1] On se souviendra des formules de dérivée suivante : $\Big(\exp\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \cdot \exp\big(u(x)\big)$ et $\big(a^x\big)' = \ln(a) \cdot a^x$

Le chiffre des centièmes “3” (de rang -2) nous permet de trouver une borne supérieure de l'erreur absolue ou de l'incertitude que l'on a sur la variable α, i.e., $\Delta\alpha = 0.5 \times 10^{-2}$ et donc d'écrire $\alpha = \underline{1.23} \pm 0.005$.
<2 pts>

Puisque $\Delta y / y = 1\%$, on a $\Delta y = 0.015 < 0.5 \times 10^{-1}$, le rang du dernier chiffre significatif est -1, correspondant au chiffre des dixième, ce qui nous permet d'écrire $y = \underline{1.5}0 \pm 0.015$ (ou $y = \underline{1.5}0 \pm 0.05$ en considérant une borne d'incertitude plus large).
<1 pt>

Finalement, la connaissance d'un intervalle de confiance pour la mesure de c nous permet d'écrire ; d'une part que la valeur approximée pour cette variable sera le centre de cette intervalle et d'autre part qu'une borne supérieure de son erreur absolue est la demi largeur de cet intervalle, i.e., $\Delta c = 0.005$. Comme $\Delta c \leq 0.5 \times 10^{-2}$, cela nous permet aussi d'écrire que $c = \underline{1.39}5 \pm 0.005$.
<2 pts>

2.(b)

On a pour valeur approchée de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}^\star(y; c, \alpha) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{1.5}{1.23}\right)^{1.395}\right] \approx 0.7325_{8515}$$

<2 pts>

Pour calculer l'incertitude de $\mathcal{F}$, on doit calculer la différentielle $\Delta\mathcal{F}(y; c, \alpha)$, et en se souvenant d'une part que $\Big(\exp\big(u(x)\big)\Big)' = u'(x) \cdot \exp\big(u(x)\big)$ et $\big(a^x\big)' = \ln(a) \cdot a^x$ et que les incertitudes numériques **s'ajoutent toujours** (et ne se retranche jamais), on a

$$\Delta\mathcal{F}(y; c, \alpha) = \exp\left(-\frac{y^c}{\alpha^c}\right)\left\{ \left|\frac{c y^{c-1}}{\alpha^c}\right| \cdot \Delta y + \left|c y^c \alpha^{-c-1}\right| \cdot \Delta\alpha + \left|\ln\left(\frac{y}{\alpha}\right)\left(\frac{y}{\alpha}\right)^c\right| \cdot \Delta c \right\}$$

<6 pts>

Rappelons que $\exp\big(-\frac{y^c}{\alpha^c}\big)$ à déja été calculé cinq lignes avant $(= 1 - 0.7325_{8515} = 0.2674_{1485})$ et que $\Delta c = \Delta\alpha = \Delta = 0.005$ et $\Delta y = 3\Delta\alpha = 3\Delta c = 3\Delta$, calculé en 2.(a), on a :

$$\Delta\mathcal{F}(y; c, \alpha) \quad = \quad \underbrace{\mathcal{F}^\star(y; c, \alpha) \cdot \Delta}_{1.3370_{7425} \times 10^{-3}} \cdot \left\{ \underbrace{3 \cdot \left|\frac{c y^{c-1}}{\alpha^c}\right|}_{3.6798_{81885}} + \underbrace{\left|c y^c \alpha^{-c-1}\right|}_{1.4958_{86945}} + \underbrace{\left|\ln\left(\frac{y}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{y}{\alpha}\right)^c\right|}_{0.2617_{476755}} \right\} \approx 0.00727_{03633}$$

<2 pts>

2.(c)

Le calcul précédent nous montre que c'est l'imprécision sur y qui engendre le plus d'erreur d'imprécision sur le résultat.
<3 pts>

2.(d)

La méthode de la fourchette peut être utilisée ici car on peut trouver les vrais bornes min et max de l'intervalle de confiance de $\mathcal{F}(.)$ à partir des bornes min et max des intervalles de confiances associés à chacune des variables incertaines (y, c, α) et parce que, aussi $\mathcal{F}(.)$ est continue et monotone sur chaque intervalle associé à chaque mesure incertaine $(\alpha \neq 0)$. En effet, soit $[y_{\min}, y_{\max}]$, $[c_{\min}, c_{\max}]$ et $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, les intervalles de confiances associés aux variables incertaines (y, c, α), on a :

$$\mathcal{F}(y; c, \alpha) \in \left[\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{y_{\min}}{\alpha_{\max}}\right)^{c_{\min}}\right), \ldots, 1 - \exp\left(-\left(\frac{y_{\max}}{\alpha_{\min}}\right)^{c_{\max}}\right)\right]$$

Nota : Du fait que les conditions sont remplies pour que la méthode de la fourchette marche, on pourrait aussi calculer numériquement les 8 bornes possibles (2 possibilités pour y soit $y_{\min}$ et $y_{\max}$, 2 possibilités pour α et deux possibilités pour α) et retenir parmis ses 8 bornes, la borne la plus petite et la borne la plus grande !

et l'incertitude d'une variable est donnée par la demi largeur de son intervalle de confiance, i.e. :

$$\Delta\mathcal{F}(y;c,\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\,1-\exp\Big(-\Big(\frac{y_{\min}}{\alpha_{\max}}\Big)^{c_{\min}}\Big)\Big] - \Big[1-\exp\Big(-\Big(\frac{y_{\max}}{\alpha_{\min}}\Big)^{c_{\max}}\Big)\Big]$$

<6 pts>

Nota : Avec $y \in [1.485, \cdots, 1.515]$, $c \in [1.39, \cdots, 1.40]$ et $\alpha \in [1.225, \cdots, 1.235]$, on trouve :

$$\mathcal{F} \in [0.7252_{957056}, \cdots, 0.7398_{353257}]$$

i.e.,

$$\mathcal{F} = 0.7325_{655157} \pm \Delta\mathcal{F} \approx 0.00726_{981005}$$

L'approximation et la marge d'erreure $\Delta\mathcal{F}$ obtenue par cette méthode est la mème que celle donnée par la méthode des séries de Taylor à 10^{-6} près !

II. Erreur en Arithmétique Flottante (31 pts)

1. Expliquer pourquoi le calcul numérique de ces deux expressions

   (a) $\sqrt{x^2+1}-x$

   (b) $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}$

   peuvent conduire à des problèmes d'erreurs numériques (identifier aussi pour quelle valeur de x). Identifier et citer le problème numérique associé et proposer une expression équivalente qui permettrait d'éviter ces problèmes numériques et/ou augmenter la précision des calculs de ces deux expressions.
   <7 pts>

2. On désire évaluer l'expression suivante ; $f(x) = \tan(x) - \sin(x), \quad$ pour $\; x \to 0$

   (a) Citer le problème numérique associé à l'évaluation de cette expression.
   <2 pts>

   (b) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire de façon équivalente (ou de façon approximée quand $x \to 0$) par ces trois expressions :

      i. $\big(\frac{1}{\cos(x)} - 1\big)\cdot\sin(x)$

      ii. $\frac{x^3}{2}$

      iii. $\tan(x)\cdot\frac{\sin^2(x)}{(\cos(x)+1)}$

   <4.5 pts>

   (c) Classer par ordre d'intérêt, i.e., du plus intéressant au moins intéressant (en termes d'erreurs numériques) ces trois expressions équivalentes en justifiant bien votre réponse.
   <4.5 pts>

3. Expliquer le type de problème numérique existant dans ce programme et proposer une correction possible (les éléments du tableau 1D $a[.]$ sont remplies de petites valeurs comprise entre 0.01 et 0.05).

```
. b= 1 000 000 000 ;
. FOR( i=0 ; i<100 000 000 ; i++)    { b += a[i] ; }
```

<**5 pts**>

4. Donner un exemple, en arithmétique flottante, ou :

$$(a+b)+c \neq a+(b+c)$$

<**3 pts**>

5. Dans la première question du devoir n^{0}1 (Méthode de Newton & Fractales), on vous demandait d'implémenter la relation itérative de Newton sur la fonction $f(c_{\text{MV}}; y_i)$ en utilisant pour la dérivée de cette fonction une approximation du style : $f'(x) = [f(x+\epsilon) - f(x)]/\epsilon$.
Discuter suivant les différentes valeurs possibles de ϵ, **toutes** les erreurs numériques, mathématiques ou autres, intervenant dans cette approximation numérique.
<**5 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Dans les deux cas, on aura un problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux. Pour éviter ce problème, on doit écrire ces relations de telle façon que plus aucune soustraction de deux nombres incertains (i.e., imprécis) quasi égaux apparaissent.

[-a-] Pour la première expression, cette annulation de cse se passe lorsque $x \to \infty$. Pour éviter cela, on peut utiliser le conjugué de l'expression $\sqrt{x^2+1} - x$ que l'on multiplie au numérateur et au dénominateur :

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)\,(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

<**3.5 pts**>

Nota : pour l'expression $\sqrt{x^2+1} - x$, dès que $x > 10^7$, avec une bonne calculatrice, je trouve (faussement) $\sqrt{x^2+1} - x = 0$, alors que l'expression equivalente montre clairement que l'on devrait trouver $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \approx \frac{1}{2x} \approx 5 \times 10^{-8}$.

[-b-] Pour la deuxième expression, cette annulation de cse se passe lorsque $x \to 0$. Mettre cette expression au même dénominateur permet d'éviter ce problème :

$$\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{2x^2}{1-x^4}$$

<**3.5 pts**>

Nota-1- : pour l'expression (b), dès que $x \leq 10^{-8}$, avec une bonne calculatrice, je trouve (faussement) $\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$, alors que l'expression equivalente, i.e., $\frac{2x^2}{1-x^4}$ montre clairement que :

$$\text{pour} \quad x = 10^{-8}, \quad \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1-x^4} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ !!}$$

Nota-2- : Un développement limité à l'ordre 2 aurait été possible et nous aurait permis d'éviter la soustraction de ces deux nombres incertains :

$$\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \approx 1 + x^2 + O(x^4) - (1-x^2) + O(x^4) \approx 2x^2 + O(x^4)$$

et on aurait trouvé aussi que pour $\quad x = 10^{-8}, \quad \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2} \approx 2x^2 + O(x^4) = 2 \cdot 10^{-16}$, avec une erreure estimée à $O(x^4)$, i.e., 10^{-32} près !

2.

[-a-] On aura inévitablement, dans ce cas, un problème d'annulation de cse due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux (rappelez vous que l'ordinateur utilise les séries de Taylor, avec un nombre fini de termes, pour approximer la fonction tan(.) et la fonction cos(.)).
<2 pts>

[-b-]

$$\begin{aligned}
\tan(x)-\sin(x) &= \text{(i.)} \quad \sin(x)\Big(\frac{1}{\cos(x)}-1\Big) \\
&\approx \text{(ii.)} \quad x+\frac{x^3}{3}+O(x^5)-x+\frac{x^3}{6}+O(x^5)\approx\frac{x^3}{2}+O(x^5) \\
&= \text{(iii.)} \quad \tan(x)\Big(1-\frac{\sin(x)}{\tan(x)}\Big)=\frac{\tan(x)\cdot\big(1-\cos(x)\big)\big(1+\cos(x)\big)}{\big(1+\cos(x)\big)}=\frac{\tan(x)\cdot\big(1-\cos^2(x)\big)}{\big(1+\cos(x)\big)} \\
&= \quad \frac{\tan(x)\cdot\sin^2(x)}{\big(1+\cos(x)\big)}
\end{aligned}$$

<4.5 pts>

[-c-]

• La première expression (i.) est la moins intéressante des trois cas, car on garde le problème numérique ; à savoir la soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux. Si on veut être précis, l'un de ces deux nombres seulement est approximé dans cette expression (le ″1″ à une représentation exacte en notation flottante), contrairement à l'expression de base, dans laquelle on a la soustraction de deux nombres -tous les deux approximées- et quasi égaux. Cependant numériquement, cela reste la moins intéressante des trois expressions.

• La deuxième expression (ii.) est un peu plus intéressante mais reste une approximation (que l'on peut toutefois quantifier grâce au terme $O(x^5)$).

• La troisième expression est la plus intéressante ; c'est une expression réellement équivalente pour laquelle plus aucune soustraction de deux nombres incertains quasi égaux apparaissent.
<4.5 pts>

3.

On aura une perte de précision du à l'addition de deux nombres de grandeur differentes (erreur de décalage). Pour minimiser ce problème ; il vaut mieux faire dans ce cas :

```
. b=0 ;
. FOR( i=0 ; i<100 000 000 ; i++)    { b += a[i] ; }
. b+= 1 000 000 000 ;
```

A la sortie de la boucle, on est susceptible de se retrouver avec une somme de ≈ 3 millions qui sera additionnée à un milliard et qui ne posera pas le problème que pose la somme de un milliard auquel on ajoute 0.1 !
<5 pts>

4.

Par exemple (et on peut le vérifier avec sa calculatrice) :

$$(-10^{20}+10^{20})+1 \quad (=1) \qquad \neq \quad -10^{20}+(10^{20}+1) \quad (=0)$$
$$(a+b)+c \quad \neq \quad a+(b+c)$$

<3 pts>

5.

[1] Cette approximation est la discrétisation directe de la formule mathématique définissant ce qu'est mathématiquement une dérivée, i.e. ;

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Il faut donc, pour respecter cette définition mathématique que ϵ soit le plus petit possible.

[2] Cependant, si ϵ est trop petit, alors on a soit le problème numérique important de soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux et si ϵ est vraiment trop trop petit, alors il risque de se passer le problème d'UNDERFLOW, et ϵ sera ainsi approximé (i.e., arrondi) par la machine par 0 et du coup $f'(x) = 0/0 =$ NAN !

En résumé, Il faut que ϵ soit assez petit pour respecter la définition mathématique et assez grand pour ne pas être trop confronté au problème de soustraction de deux nombres approximés quasi-égaux ! (Dans tous les cas, on aura certainement aussi une erreur d'affectation car $f(x+\epsilon)$ et $f(x)$ ont peu de chance d'avoir une représentation exacte).
<5 pts>

Nota : Concernant la question de ce devoir, je vous conseillais la valeur $\epsilon = 10^{-5}$, et pour cette valeur, la méthode converge pour une tolérance sur x et $f(x)$ en 5 itérations. Avec $10^{-2}, 10^{-1}$ et 10^{0}, on converge respectivement en 6, 7 et 40 itérations. Avec $10^{-6}, 10^{-7}$, on converge respectivement en 6, 14 itérations et pour 10^{-8}, on diverge !!!. Le choix de cette valeur est donc crucial !

III. Méthode de la Bissection/Point Fixe/Newton (40 pts)

1. **Méthode de la Bissection**
   (a) Que pensez-vous de la suggestion suivante ?
   "On pourrait modifier la méthode de la Bissection pour une méthode que l'on pourrait appeler *trisection* et qui consisterait à calculer, pour chaque itération, la valeur de la fonction f (pour laquelle on cherche une racine x tel que $f(x) = 0$) au premier tier (d'abscisse m_1) et au deuxième tier (d'abscisse m_2) de l'intervalle $[x_1, \ldots, x_2]$ (qui encadre la racine à chaque itération) et ensuite prendre, parmis les quatres points $\{x_1, x_2, m_1, m_2\}$, le plus petit intervalle (donc deux points) qui encadre la racine (i.e., trouver x_a et $x_b \in \{x_1, x_2, m_1, m_2\}$ tel que $f(x_a)f(x_b) < 0$ et $|x_b - x_a|$ soit le plus petit possible).
   Discuter de la pertinence d'une telle méthode en comparaison avec la méthode de la Bissection.
   <5 pts>
   (b) Deux méthodes numériques sont possibles pour calculer le point milieu m d'un intervalle $[a, b]$ comme on le demande dans la méthode de la bissection :
      i. $m = (a + b)/2.0$
      ii. $m = a + (b - a)/2.0$
   Laquelle de ces deux méthodes est préférable et pourquoi ?
   <3 pts>
2. **Méthode du Point Fixe**
   On se propose de trouver numériquement dans $R_\star^+$ une valeur approchée d'une des racines de la fonction

$$f(x) = \exp(x)\sqrt{x} - 1 \qquad (1)$$

   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette Eq. (1) dans l'intervalle $J = [0, 1/2]$.
   <4 pts>
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g_i(x) = x$ avec
      i. $g_1(x) = \exp(-2x)$

ii. $g_2(x) = -\ln(\sqrt{x})$

iii. $g_3(x) = \exp(x)\sqrt{x} - 1 + x$

<3 pts>

(c) Montrer, que sur l'intervalle $[a, 1/2]$, une seule de ces trois suites $(r_n = g_i(r_{n-1}))$ converge vers une solution unique r, quel que soit le premier terme de la suite, $r_0 \in [a, 1/2]$, a étant à préciser.
<10 pts>

3. **Méthode de Newton**
On se propose d'utiliser la méthode de Newton sur l'équation

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \exp(-2x) = 0$$

(a) Donner la relation itérative $r_{n+1} = g_{\text{newt.}}(r_n)$ intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution itérative de la racine r de l'équation $x - \exp(-2x) = 0$.
<5 pts>

(b) Montrer qu'avec $r_0 = 0.5$, la relation itérative de Newton converge.
<5 pts>

(c) Calculer les 4 premières estimées $r_1, \ldots, r_4$, en partant de $r_0 = 0.5$.
<5 pts>

Réponse

1.(a)

Contrairement à la méthode de la Bissection qui, à chaque itération, demande une seule évaluation de fonction et qui diminue l'intervalle de recherche par deux à chaque itération, cette méthode de la *trisection* exigerait donc deux évaluation de fonction et réduirait l'intervalle de recherche par trois (dans le meilleur des cas), La convergence de cette méthode est donc toujours linéaire et seule la constante assymptotique du taux de convergence est donc changée (entre 1/2 et 1/3).

Pour deux fois plus de cout calculatoire, l'erreur ne serait réduit (dans le meilleur des cas) que par 1/3 au lieu de 1/2.

Pour le même cout calculatoire, i.e., deux évaluations de fonction, je preferre faire deux itérations de la méthode de la Bissection et réduire l'intervale par 1/4 plutôt que par 1/3 (dans le meilleur des cas) avec la méthode de la *trisection*. N'étant pas pertinente, cela explique pourquoi la méthode de la *trisection* n'est jamais considérée et utilisée.
<5 pts>

1.(b)

La première expression (en plus de comporter une opération de moins comparativement à la deuxième) est la plus intéeressante si on veut minimiser le problème de la soustraction de deux nombres approximées quasi-égaux lorsque l'intervalle de recherche $[a, b]$ devient petit. Notons aussi que le risque d'OVERFLOW de la première expression est assez négligeable car l'intervalle initiale, qui se doit d'encadrer la racine, est trouvé par supervision et se veut pas trop grand.
<3 pts>

2.(a)

L'étude des variations de la fonction f sur $J = [0.0, 0.5]$ montre que la fonction est continue et croissante sur J (donc monotone) car $f'(x) = \exp(x)(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}) = \exp(x)(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}) > 0$ sur J.
<2 pts>
De plus, on a $f(0) = -1$ et $f(0.5) \approx 0.1658$ donc $f(0)f(1) < 0$ et puisque la fonction f est continue et croissante sur J, il existe donc une racine r unique dans cet intervalle.

<2 pts>

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$

$$\exp(x)\sqrt{x}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \exp(x)\sqrt{x}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}=\exp(-x) \quad\Leftrightarrow\quad x=\exp(-2x)$$

$$\exp(x)\sqrt{x}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \exp(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad\Leftrightarrow\quad x=-\ln\sqrt{x}$$

$$\exp(x)\sqrt{x}-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\exp(x)\sqrt{x}-1+x$$

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$

Pour la première suite $r_n=g_1(r_{n-1})$, on a :

$$|g_1'(x)|=|-2\exp(-2x)|=2\exp(-2x)<1$$

$$\exp(-2x)<1/2 \quad\Leftrightarrow\quad -2x<-\ln(2) \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{\ln(2)}{2}\approx 0.347$$

donc sur $\left[\frac{\ln(2)}{2},1/2\right]$, la suite semble contractante, avec $a=\frac{\ln(2)}{2}\approx 0.347$.

Maintenant, on doit vérifier absolument que sur le nouveau intervalle, on encadre toujours la racine,i.e., $f(\ln(2)/2)f(1)<0$, ce qui est vrai car $f(\ln(2)/2)\approx -0.168$ et on a toujours $f(0.5)\approx 0.1658$.
<5 pts>

Pour la deuxième suite $r_n=g_2(r_{n-1})$, on a $|g_2'(x)|=|\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}|=|1/2x|>1$ sur $J=]a,1/2]$ (avec $a>0$) donc la suite n'est pas contractante.
<2.5 pts>

Pour la troisième suite $r_n=g_3(r_{n-1})$, on a $|g_3'(x)|=|\exp(x)(\frac{2x+1}{2\sqrt{x}})+1|$ (la première partie à été déjà calculée en 2.(a)) sur $J=]a,1/2]$ (avec $a>0$) donc la suite n'est pas contractante.
<2.5 pts>

Nota -1- : Le mieux dans ce type de question est d'essayer la suite itérative en question avec sa calculatrice pour se convaincre de la convergence ou non de la suite. Avec une calculatrice CASIO, par exemple, la première suite itérative se programme facilement en affichant 0.5 puis $\boxed{\text{EXE}}$ puis en affichant $\exp(-2\boxed{\text{ANS}})$, chaque appel à la touche $\boxed{\text{EXE}}$ nous permet d'avoir une itération de la suite (cf. Nota-2-).

Ainsi pour la deuxième suite, on s'apercoit que l'on a un problème puisque en commencant avec $r_0=0.5$, la seconde valeur donné à la racine carrée sera négative et donc, r_1 ne pourra même pas se calculer ; la suite est donc forcement divergente ! et la troisième suite aussi car celle-ci nous donne $\text{l}\infty$ au bout de cinq termes et sort très vite de l'intervalle considéré $[0;1/2]$ à la deuxième itération !

Nota -2- : Avec la première suite itérative dont la convergence est assurée par la méthode du point fixe sur $\left[\frac{\ln(2)}{2},1/2\right]$, la convergence sera très lente, car la convergence de la méthode du point fixe est linéaire, de type $|e_n|=|C|\cdot|e_{n-1}|$ avec $C=g_1'(r)$ pour $r\in[0.347,0.5]$ et une valeur de constante assymptotique qui sera au mieux (i.e., la plus petite, pour assurer une convergence la plus rapide) possible égale à $C=g_1'(r=0.5)=0.735$. La décroissance sera dons très lente !.
En partant de $r_0=0.4$, on a, $r_n=g_1(r_{n-1})$ et :

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.4493289641 \\
r_2 &= 0.4071156717 \\
r_3 &= 0.4429796958 \\
\ldots &= \ldots \\
r_{20} &= 0.4252049062 \\
r_{21} &= 0.4272398079 \\
\ldots &= \ldots \\
r_{127} &= 0.426302751
\end{aligned}
$$

Sur ma calculatrice, l'estimation se stabilise à partie de $r_{127} = 0.426302751$! ! !

3.(a)

La fonction $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la méthode itérative de Newton permet d'écrire :

$$
r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n - \frac{r_n - \exp(-2r_n)}{1 + 2\exp(-2r_n)} = \frac{\exp(-2r_n)(1 + 2r_n)}{1 + 2\ \exp(-2r_n)}
$$

<5 pts>

3.(b)

Dans ce cas, le plus simple est de montrer que la fonction $f(x)$, sur l'intervale $J = [0, 1/2]$ (intervale dans lequel on prendra $r_0 = 0.5$ et dans lequel une racine unique s'y trouve) ne présente pas d'*extrema*, i.e., de valeurs pour laquelle, $f'(x)$ s'annule.

Dans notre cas, $f(x) = x - \exp(-2x) = 0$ et $f'(x) = 1 + 2\exp(-2x) > 0$, toujours positif sur J donc aucun problème !

<5 pts>

Nota : Il aurait été beaucoup moins facile de démontrer que cette suite itérative de Newton converge en considérant le fait que cette suite est aussi un point fixe du type $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et que, pour que la convergence ait lieu, $|g'_{\text{newt.}}(\xi)| < 1, \quad \forall \xi \in J$, en effet,

$$
g_{\text{newt.}}(x) = x - \frac{x - \exp(-2x)}{(1 + 2\exp(-2x))} \quad \text{donc} \quad g'_{\text{newt.}}(x) = 1 - \frac{(1 + 2\exp(-2x)) + 4\exp(-2x)(x - \exp(-2x))}{(1 + 2\exp(-2x))^2}
$$

$$
g'_{\text{newt.}}(x) = \frac{-4\exp(-2x)(x - \exp(-2x)}{(1 + 2\exp(-2x))^2} = \frac{-4(x\exp(2x) - 1)}{(\exp(2x) + 2)^2}
$$

$g'_{\text{newt.}}(x)$ est décroissante sur $[0, 1/2]$, et $g'_{\text{newt.}}(0) = 4/9$ et $g'_{\text{newt.}}(0.5) \approx -0.064$ donc $|g'(\xi)| < (4/9) < 1$ $\forall \xi \in [0, 1/2]$ et la suite est donc convergente.

3.(c)

En partant de $r_0 = 0.5$, on a, $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et :

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.4238831152 \\
r_2 &= 0.4263000539 \\
r_3 &= 0.426302751 \\
r_4 &= 0.426302751
\end{aligned}
$$

<5 pts>

Nota : Sur ma calculatrice, l'estimation se stabilise très rapidement, à partir de $r_3 = 0.426302751$! ! (à comparer avec la méthode du point fixe précédente qui se stabilisait à partir de r_{127}). Cela nous indique aussi que la fonction dont on cherche la racine est très linéaire au voisinage de la racine.

IV. Interpolation (21 pts)

1. Trouver, en utilisant la formule de Lagrange, une interpolation de $\ln(1.5)$ en utilisant la connaissance des points suivants et trouver ensuite une borne supérieure de l'erreur d'interpolation associée à cette estimation.

x_k	1	2	3
$y_k = \ln(x_k)$	0	≈ 0.7	≈ 1.1

   <10 pts>

2. Trouver, en utilisant la formule de Newton-Gregory, une interpolation de $\ln(1.5)$ en utilisant le tableau précédant.
   <7 pts>
3. En prenant pour quatrième point : $[1.39 \approx \ln(4)]$, trouver une approximation de l'erreur de cette interpolation ne nécessitant pas la connaissance de la fonction f.
   <4 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

En utilisant donc le polynôme de collocation d'ordre deux qui passe par ces trois points, on a

$$P_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \times 0.7 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} \times 1.1$$

<4 pts>

Une valeur interpolée pour $\ln(1.5)$ est donc estimée par

$$\ln(1.5) \approx P_2(x = 1.5) \approx 0.525 - 0.1375 \approx 0.3875$$

<2 pts>

Une borne supérieure de l'erreur d'interpolation est donnée par (puisque $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f'''(x) = 2/x^3$)

$$\begin{aligned}
\left|\exp(0.5) - P_2(0.5)\right| &< \left|\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)\,!}\,(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)\right| \qquad \xi \in [1,3] \\
&< \left|\frac{\frac{2}{\xi^3}}{3\,!}\,(1.5-1)\,(1.5-2)\,(1.5-3)\right| \qquad \xi \in [1,3] \\
&< \left|\frac{\frac{2}{1^3}}{3\,!} \times 0.5 \times (-0.5) \times (-1.5)\right| \\
&< 0.125
\end{aligned}$$

<4 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

En prenant donc ces trois points (équidistants et ordonnés), le tableau des différences s'écrit

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1	0		
		0.7	
2	0.7		-0.3
		0.4	
3	1.1		

<3 pts>

On obtient le polynôme suivant : $P_2(s) = 0.7s - \dfrac{0.3\,s\,(s-1)}{2}$

<3 pts>

Pour l'interpolation on trouve, puisque $s = \frac{1}{h}(x - x_0) = \frac{1}{1}(1.5 - 1) = 0.5$

$$\ln(1.5) \approx P_2(x = 1.5) = P(s = 0.5) \approx 0.35 + 0.0375 = 0.3875$$

<1 pt>

Nota : On obtient la même interpolation avec la méthode de Lagrange et la méthode de Newton-Gregory puisque ces deux interpolations sont faîts à partir du polynome de collocation d'ordre deux, unique, calculé à partir des trois mêmes points.

$\boxed{\textbf{3.}}$

En complétant le tableau, on a

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
...	...	...	...	...
		0.4		0.19
3	1.1		-0.11	
		0.29		
4	1.39			

En utilisant toujours $s = 0.5$, on a une approximation de l'erreur donnée par

$$E_2(x = 1.5) \approx \frac{s(s-1)(s-2)}{6} \times 0.19 \approx 0.011875$$

<4 pts>

Nota : On peut remarquer que l'approximation de l'erreur donnée par la méthode de Newton-Gregory est très bonne $|\ln(1.5) - 0.3875| = 0.017965109 \approx E_2(x = 1.5) = 0.011875$.