DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *24/04/2014*

I	Moindres Carrés (44 pts)
II	Dérivation Numérique (10 pts)
III	Intégration Numérique (45 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (12 pts)
V	Résolution de système d'Équations Différentielles (10 pts)
Total	121 points

Tous documents personnels, calculatrices et calculateurs autorisés

I. Moindres Carrés (44 pts)

La viscosité μ de certains polymères peut varier en fonction de la température ou de la vitesse de cisaillement γ (décrivant la variation spatiale de la vitesse d'écoulement du fluide). Cela explique pourquoi le moteur d'une voiture a plus de mal à démarrer lorsqu'il fait très froid car l'huile à moteur (polymères synthétiques) devient en fait plus visqueuse. Un modèle mathématique intéressant, pour décrire ce phénomène physique $\mu(\gamma)$ de viscosité, est la loi de puissance donnée par la relation :

$$\mu(\gamma) = \mu_0 \, \gamma^{\beta-1} \tag{1}$$

avec les paramètres $[\mu_0, \beta]$ qui sont appelé respectivement les paramètres de viscosité initiale et de pseudo-plasticité.

On dispose de N mesures (ou données) expérimentales de viscosité μ en fonction de γ $[\gamma_i, \mu_i = \mu(\gamma_i)]$ (d'un lubrifiant moteur), et le but de cet exercice est de chercher à estimer les paramètres $[\mu_0, \beta]$ de cette loi qui s'ajustent le mieux aux données, au sens du critère des moindres carrées à partir du tableau de $N = 3$ données suivantes :

Table 1 :

γ_i	0.01	0.1	1.0
$\mu_i = \mu(\gamma_i)$	3000	1000	200

1. **Régression Linéaire**
   Pour simplifier la résolution de ce problème d'estimation au sens des moindres carrés, on va d'abord essayer de se ramener, par changement de variable, à de nouvelles données cherchant à s'ajuster linéairement à une droite d'équation : $Y = aX + b$

   (a) Trouver ce changement de variable et exprimer ensuite les paramètres (a, b) de cette droite en fonction des paramètres $[\mu_0, \beta]$ de cette loi de puissance.
   <5 pts>

   (b) En supposant que l'on fasse le changement de variable de la question précédente, donner l'expression du résidu $R(a, b)$ (ou écart quadratique) qui serait minimisé par cette régression linéaire par la méthode des moindres carrés.
   <3 pts>

   (c) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a et b.
   <3 pts>

   (d) Trouver les coefficients a et b en résolvant ces équations normales par la méthode du pivot de Gauss (sans pivotage).
   <8 pts>

   (e) En déduire les paramètres $[\mu_0, \beta]$ de cette loi de puissance.
   <4 pts>

2. **Régression Non-Linéaire**
   Dans cette partie, on ne fera aucun changement de variable pour se ramener au cas linéaire comme précédemment et on considérera directement une estimation permettant d'estimer les paramètres $[\mu_0, \beta]$ de l'Eq. (1) qui minimise le résidue $R(\mu_0, \beta) = \sum_{i=1}^{N} (\mu(\gamma_i) - \mu_i)^2$, c'est-à-dire une régression non linéaire.

   (a) Donner le système d'équations équations (non-linéaires) permettant de trouver les coefficients $[\mu_0, \beta]$ au sens des moindres carrés de cette loi de puissance et simplifier ce système au maximum (un des paramètres pourra être résolue de façon analytique).
   <8 pts>

3. **Autres Méthodes**

(a) Donner par la méthode de votre choix, le polynôme de collocation qui passe par les trois points de données.
<**5 pts**>

(b) Si les données sont bruitées, quelles sont les critiques que l'on peut apporter à la méthode d'interpolation par polynôme de collocation ? D'ailleurs, dans notre exemple, comment pourrait-on savoir que les données sont effectivement très bruitées ?
<**5 pts**>

(c) Si, pour un problème particulier, on devait calculer l'aire sous les points de données (Table 1), quelle serait la technique la plus adéquate ? Justifier bien votre réponse sans calculer cette aire.
<**3 pts**>

Réponse

1(a)

En posant $Y = \ln(\mu)$ et $X = \ln(\gamma)$, on arrive facilement à un problème d'ajustement (ou régression) linéaire des données : $Y = aX + b = \underbrace{(\beta - 1)}_{a}\, X + \underbrace{\ln(\mu_0)}_{b}$ avec les paramètres $a = \beta - 1$ et $b = \ln(\mu_0)$.

<5 pts>

1(b)

Après changement de variable, le résidu que l'on cherchera à minimiser par cette technique des moindres carrés est

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \Big(Y_i - (a\,X_i + b)\Big)^2$$

<3 pts>

1(c)

Les paramètres (a, b) sont solutions des équations normales ou du système matriciel suivant (cf. cours) :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i^2 & \sum_{i=1}^{N} X_i \\ \sum_{i=1}^{N} X_i & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_i\, Y_i \\ \sum_{i=1}^{N} Y_i \end{pmatrix}$$

<3 pts>

1(d)

Avec le changement de variable $Y = \ln(\mu)$ et $X = \ln(\gamma)$, on trouve les données suivantes

X_i	-4.605	-2.303	0.000
Y_i	8.000	6.908	5.298

<2 pts>

et le système d'équations linéaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} 26.510 & -6.908 \\ -6.908 & 3.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52.749 \\ 20.206 \end{pmatrix}$$

<2 pts>

puis par une opération élémentaire ; $R_2 = R_2 - \frac{(-6.908)}{(26.510)} R_1$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 26.510 & -6.908 \\ 0 & 1.200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52.749 \\ 6.460 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous permet d'obtenir, $\boxed{b \approx 5.384}$, puis, $26.51a - 6.908 \times (5.384) = -0.587$, i.e., $\boxed{a \approx -0.587}$

<4 pts>

1(e)

En utilisant le fait que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \beta - 1 \\ b & = & \ln(\mu_0) \end{array} \right.$$

On obtient facilement, d'abord $\beta = a + 1 = 0.413$, puis $\mu_0 = \exp(b) \approx 217.9$.

Soit la loi de puissance : $\boxed{\mu(\gamma) \approx 218 \cdot \gamma^{-0.59}}$

<4 pts>

2(a)

Trouver les paramètres $[\mu_0, \beta]$ au sens des moindres carrés, c'est estimer $[\mu_0, \beta]$ pour que :

$$R_2 = R(\mu_0, \beta) = \sum_{i=1}^{N=3} \left(\mu_i - \mu_0\, \gamma_i^{\beta-1}\right)^2 \quad \text{soit minimal,}$$

c'est-à-dire tel que $\frac{\partial R(\mu_0,\beta)}{\partial \mu_0} = 0$ et $\frac{\partial R(\mu_0,\beta)}{\partial \beta} = 0$.

<2 pts>

En se souvenant que $\left(a^x\right)' = \ln(a) \cdot a^x$, la dérivation par rapport au paramètre μ_0 nous donne :

$$\frac{\partial R(\mu_0, \beta)}{\partial \mu_0} = \sum_{i=1}^{N=3} \left(\mu_i - \mu_0\, \gamma_i^{\beta-1}\right) \gamma_i^{\beta-1} = 0$$

qui peut se simplifier en : $$\mu_0 = \frac{\sum \mu_i\, \gamma_i^{\beta-1}}{\sum \gamma_i^{2\beta-2}}$$

<3 pts>

Maintenant, la dérivation par rapport au paramètre β nous donne :

$$\frac{\partial R(\mu_0, \beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{N=3} \left(\mu_i - \mu_0\, \gamma_i^{\beta-1}\right) \mu_0\, \ln(\gamma_i)\, \gamma_i^{\beta-1} = 0$$

qui ne peut se simplifier plus (i.e., ne peut être résolu analytiquement) et est de la forme $f(\beta) = 0$ (en mettant l'expression analytique de μ_0 dans cette équation) que l'on peut résoudre par exemple, par la méthode de la bissection.

<3 pts>

3(a)

Puisque les points ne sont pas équidistants, on ne peut qu'utiliser la méthode de Lagrange ou la méthode de Newton. On utilisera ici, la méthode de Lagrange dont l'expression analytique de ce polynôme d'ordre 2 passant par ces trois points de données est :

$$\begin{aligned} \mu(\gamma) &= \frac{(\gamma - 0.1)(\gamma - 1)}{(-0.09)(-0.99)} \times 3000 + \frac{(\gamma - 0.01)(\gamma - 1)}{(0.09)(-0.9)} \times 1000 + \frac{(\gamma - 0.01)(\gamma - 0.1)}{(0.99)(0.9)} \times 200 \\ &\approx 21549\gamma^2 - 24593\gamma + 3244 \end{aligned}$$

Pour trouver ce polynôme d'ordre 2 de collocation, on peut aussi utiliser les différences divisées. Le tableau des différences s'écrit :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0.01	3000		
		-22222.2	
0.1	1000		21548.8
		-888.9	
1	200		

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\mu(\gamma) &= 3000 - 22222.2(\gamma - 0.01) + 21548.8(\gamma - 0.01)(\gamma - 0.1) \\ &\approx 21549\gamma^2 - 24593\gamma + 3244\end{aligned}$$

<5 pts>

3(b)

La méthode d'interpolation par polynôme de collocation va suivre bêtement les données bruitées (en *over-fittant* ou en passant par les données bruitées) et ne pas prendre en compte le modèle physique de distribution *a priori* des points de données, donc il ne va pas exploiter et intégrer, dans le processus d'interpolation, cette information cruciale. De ce fait toute interpolation en utilisant le polynôme de collocation restera très bruitée.
<2.5 pts>

Pour se convaincre que les données (de la Table 1) sont effectivement bruitées, il suffit de constater numériquement (quantitativement) ou visuellement (qualitativement) que les données ne sont pas effectivement sur la courbe $\mu(\gamma) = \mu_0\, \gamma^{\beta-1}$ avec les paramètres μ_0 et β estimé par la régression linéaire ou non linéaire. On pourrait aussi calculer le résidu, avec les paramètres qui le minimise et constater qu'il n'est pas nul.
<2.5 pts>

Nota -1- : Si on appelle μ_i° la valeur de μ_i se trouvant sur la courbe de régression et que l'on considère qu'elle est largement débruitée et qu'on compare cette valeur à μ_i, on voit effectivement que les données sont bruitées.

γ_i	0.01	0.1	1.0
μ_i	3000	1000	200
μ_i°	≈ 3299	≈ 848	≈ 218

On a respectivement une estimation de l'erreur relative pour chacune des données de $|3299-3000|/3299 \approx 9\%$, $|1000-848|/848 \approx 17.9\%$ et $|218-200|/218 \approx 8\%$. Sans trop se tromper, on peut estimer très grossièrement qu'il y a *au moins* 8% d'erreur sur les données.

Nota -2- : La non-uniformité d'équidistance des données favorisent aussi le risque d'erreur numérique dans ca calcul.

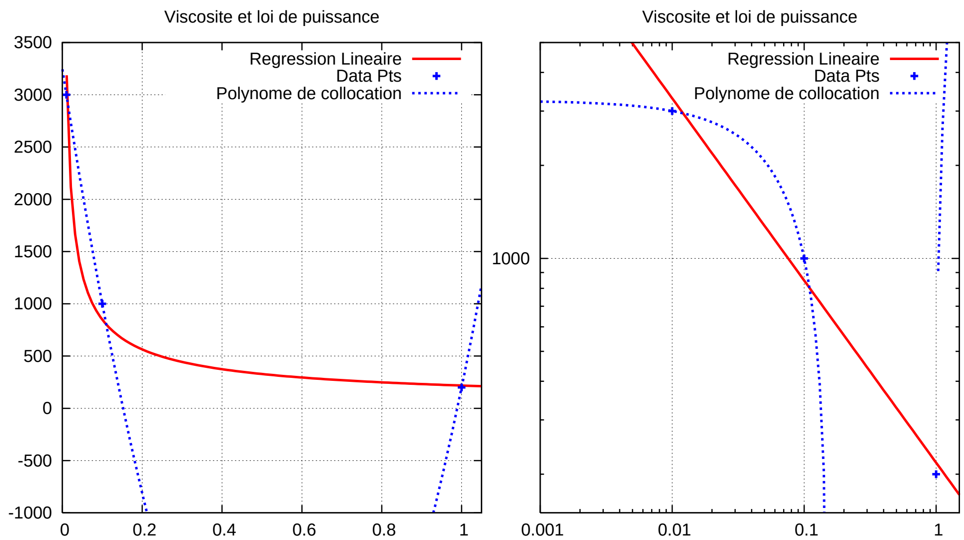
3(c)

La méthode de Simpson 1/3 ne serait pas très appropriée car elle utilise le polynôme de collocation (et cf. remarque précédente). Il est donc plus judicieux et précis, d'utiliser le processus physique de distribution *a priori* des points de données, c'est-à-dire la loi de puissance avec ses paramètres estimés au sens des moindres carrés et intégrer analytiquement sous la courbe obtenue ; c'est-à-dire intégrer sous le polynôme de regression (plutôt que sous le polynôme de collocation).
<3 pts>

Nota -1- : On obtiendrait dans ce cas :

$$\int_{0.01}^{1.0} \mu\,(\gamma)\, d\gamma = \int_{0.01}^{1.0} \mu_0\, \gamma^{\beta-1}\, d\gamma = \mu_0 \left[\frac{\gamma^\beta}{\beta}\right]_{0.01}^{1.0} = \frac{\mu_0}{\beta} - \mu_0\, \frac{0.01}{\beta}$$

Nota -2- : On voit bien ici la différence entre l'interpolation par régression (linéaire) et par la méthode du polynôme de collocation qui va suivre bêtement les données bruitées (en les *over-fittant*) et ne pas prendre en compte le modèle physique (loi de puissance) de distribution *a priori* des points de données dans le processus d'interpolation :



II. Dérivation Numérique (10 pts)

Soit la formule numérique suivante :

$$f'(x_0) \approx \frac{3\,f(x_0) - (4+\lambda)f(x_0-h) + (1+\lambda)f(x_0-2h)}{(2-\lambda)\,h} \tag{2}$$

1. En utilisant le développement en série de Taylor, déterminer l'ordre de précision de cette formule numérique d'approximation de la dérivée en fonction de la valeur du paramètre λ.

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

On a $\lambda \neq 2$ et les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} f(x_0-h) &= f(x_0) - \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f''''(x_0) + O(h^5) \\ f(x_0-2h) &= f(x_0) - \frac{2h}{1!}f'(x_0) + \frac{4h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{16h^4}{4!}f''''(x_0) + O(h^5) \end{aligned}$$

Donc la formule numérique nous donne :

$$\text{Eq. (2)} \quad \approx f'(x_0) + h\,\frac{3\lambda}{2(2-\lambda)}f''(x_0) + h^2\,\frac{4+3\lambda}{2-\lambda}f'''(x_0) + \;\ldots$$

Donc si $\lambda = 0$, un terme d'erreur en $O(h^2)$ et pour $\lambda \neq 0$ (et $\lambda \neq 2$), un terme d'erreur en $O(h)$.
<10 pts>

Nota : On pouvait anticiper ce résultat en regardant dans les tables (cf. cours) pour voir qu'une formule était très proche de l' Eq. (2), en effet ;

$$f'(x_0) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

qui correspond à l'estimation numérique de la dérivée à droite et dont la dérivée à gauche pour ce même pont x_0 (de signe contraire) correspond donc à la formule :

$$f'(x_0) = \frac{f_{-2} - 4f_{-1} + 3f_0}{2h} + O(h^2)$$

III. Intégration Numérique (45 pts)

Soit l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx \tag{3}$$

1. **Questions relatives au TP$_{[3]}$**
   (a) Montrer que $I = \pi$ (Eq. (3)) soit analytiquement, soit géométriquement.
   <5 pts>
   (b) Dans la première Question du TP$_{[3]}$, on vous demandait de calculer une valeur approchée numérique $\hat{I}$ de π) en utilisant la méthode d'intégration des Trapèzes (quadratures composites) en utilisant n intervalles. Dans cette question, pouvait-on affirmer, à l'avance, que l'erreur $I - \hat{I}$ allait être toujours positive, toujours négative ou dépendant du nombre d'intervalles utilisé ? Justifier bien votre réponse.
   <5 pts>
2. **Méthode de Simpson [1/3]**
   (a) Donner une approximation du calcul de I (Eq. (3)) en appliquant la méthode de Simpson 1/3 (quadrature simple).
   <5 pts>
   (b) Donner, par la méthode de Lagrange, l'expression analytique de la courbe sous laquelle la méthode d'intégration précédente (Simpson 1/3, quadrature simple) va réellement calculer l'estimation de I et calculer l'aire analytique sous cette courbe.
   <8 pts>
3. **Méthode d'Interpolation**
   Donner par la méthode de Newton-Gregory, le polynome de collocation de degré 3, $P_{3,\text{NG}}$ qui approxime la courbe $y = 4\sqrt{1-x^2}$ sur $[0 \quad 1]$ et intégrer analytiquement sous cette courbe pour donner une approximation de I.
   <10 pts>
4. **Méthode de Simpson [3/8]**
   Donner une approximation du calcul de I (Eq. (3)) en appliquant la méthode de Simpson 3/8 (quadrature simple).
   <5 pts>
5. **Méthode de la Quadrature Gaussienne**
   Utiliser la méthode de la Quadrature Gaussienne (2 termes) pour estimer une valeur approchée de I.
   <7 pts>

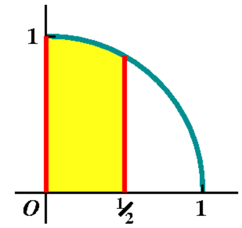
Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Montrez le, tout d'abord analytiquement, en faisant le changement de variable $x = \cos y$ (donc $dx = -\sin y\,dy$) et en utilisant la relation $[\cos^2 y + \sin^2 y = 1]$ dans le cercle trigonométrique (et sachant que $\sin y > 0$ sur $[0, \pi/2]$) :

$$I = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^0 4\sqrt{1-\cos^2 y}\,(-\sin y\,dy) = 4\int_0^{\pi/2} |\sin y| \cdot \sin y\,dy = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 y\,dy = 2\Big[y - \frac{1}{2}\sin 2y\Big]_0^{\pi/2} = \pi$$

Si on ne désire pas faire de calcul analytique, il suffit de se rappeler (cf. TP) que cette intégrale représente quatre fois l'aire d'un cercle de rayon 1. En effet I intègre quatre fois l'aire sous la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$. En mettant au carré les deux membres de cette égalité on trouve, puisque $y > 0$ (y est une racine carrée) l'équation : $[x^2 + y^2 = 1]$ d'un cercle de centre 0 et de rayon 1 qui est évalué pour $y > 0$ et $x \in [0\ \ 1]$ donc la surface $S = \pi(R = 1)^2 = \pi$.



<5 pts>

Nota : On peut aussi s'en sortir aussi en utilisant la formule analytique suivante :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin(x/a) + c$$

$$\text{et donc :} \quad 4\int \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)\right]_0^1 = 4 \times \frac{1}{2}\arcsin(1) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

1(b)

Il faut se rappeler que, géométriquement, la méthode d'intégration composite des trapèzes divise l'intervalle d'intégration en n intervalles égaux ou $n+1$ points d'abscisses équidistants et intègre sous les trapèzes. Dans notre cas, puisque la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est décroissante avec une pente $(y'(x) = x/\sqrt{1-x^2})$ de plus en plus abrupte, au fur et à mesure que $x \to 1$, ces trapèzes seront toujours contenus sous la courbe et donc l'aire obtenue par cette intégration numérique sera toujours inférieure à la vraie surface et donc $I - \hat{I} > 0$ est toujours vrai.

<5 pts>

2(a)

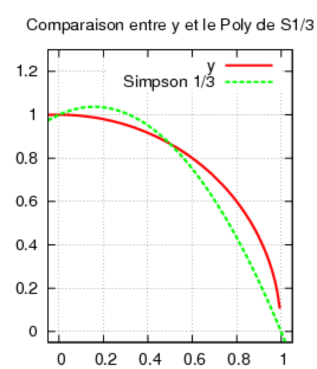
On obtient, par la méthode de Simpson (1/3) en quadrature simple, donc pour trois points équidistants (ou deux intervalles) donc pour $h = \frac{(1-0)}{2} = \frac{1}{2}$ (et pour les points d'abscisse $x = 0, x = 0.5, x = 1.0$) :

$$\begin{aligned} I_{\text{Simpson }(1/3)} &= (1/6)\Big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\Big) \\ I_{\text{Simpson }(1/3)} &\approx (1/6)\Big(4 + 13.8564 + 0\Big) \\ I_{\text{Simpson }(1/3)} &\approx 2.9760 \end{aligned}$$

<5 pts>

2(b)

Cette courbe passe donc par les points : 1 > $[x = 0 : y = 4]$
2 > $[x = 0.5 : y = 3.464]$ et 3 > $[x = 1 : y = 0]$ et la formule de la méthode de Simpson 1/3 est en fait l'aire sous le polynôme d'ordre 2 qui passe par ces points et, dont l'expression analytique, est, en utilisant la formule de Lagrange :



$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)}{(-0.5)(-1)} \times 4 + \frac{(x)(x-1)}{(0.5)(0.5-1)} \times 3.464 + \frac{(x)(x-0.5)}{(1)(1-0.5)} \times 0 \\ &\approx 8(x-0.5)(x-1) - 13.856\, x(x-1) \\ &\approx -5.856\, x^2 + 1.856\, x + 4 \approx 4\left(-1.464\, x^2 + 0.464\, x + 1\right) \end{aligned}$$

<5 pts>

L'aire analytique sous cette courbe est :

$$\int_0^1 \Big(-5.856\,x^2 + 1.856\,x + 4\Big)dx \quad = \quad \big[-5.856\,\frac{x^3}{3} + 1.856\frac{x^2}{2} + 4\,x\big]_0^1 = (-5.856/3) + (1.856/2) + 4 \approx 2.9760$$

<3 pts>

Nota : Graphiquement, la différence entre ces deux courbes se voit bien notamment lorsque y à sa pente qui tend vers 1. On peut constater aussi graphiquement, que des erreurs de surface $(I - \hat{I})$ négative vienne compenser, quelque peu, des erreurs de surface positives, ce qui montre que le processus d'intégration est très stable. Heureusement, aussi, on retrouve la même surface que celle estimée à la question 2(a).

$\boxed{\textbf{3}}$

On a besoin donc de 4 points équidistants (à cause de la méthode de Newton Gregory) pour définir de façon unique ce polynôme de collocation d'ordre 3, soit les points $[x = 0 : y = 4]$, $[x = 0.333 : y = 3.771]$, $[x = 0.666 : y = 2.981]$ et $[x = 1.0 : y = 0]$. En prenant donc ces quatre points (équidistants et ordonnés), on doit donc calculer le tableau des différences qui s'écrit

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	4			
		-0.229		
$0.\overline{3}$	3.771		-0.561	
		-0.790		-1.63
$0.\overline{6}$	2.981		-2.191	
		-2.981		
1	0			

<4 pts>

Le polynôme de collocation $P(s)$ s'écrit (avec $s = x/0.333$) :

$$\begin{aligned} P(s) &= f_0 + s\,\frac{\Delta f_0}{1!} + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 \\ &= 4 - 0.229\,s + \frac{s(s-1)}{2}(-0.561) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}(-1.63) \\ &= -0.2716\,s^3 + 0.5345\,s^2 - 0.4918\,s + 4 \end{aligned}$$

Donc, puisque $s = x/h = x/0.333$, on trouve : $P(x) = -7.3333\,x^3 + 4.8105\,x^2 - 1.4754\,x + 4$

<3 pts>

$$\text{et,} \quad \hat{I}_{\text{Interp}} = \int_0^1 -7.3333\,x^3 + 4.8105\,x^2 - 1.4754\,x + 4 \approx -1.8333 + 1.6035 - 0.7377 + 4 \approx 3.032$$

<3 pts>

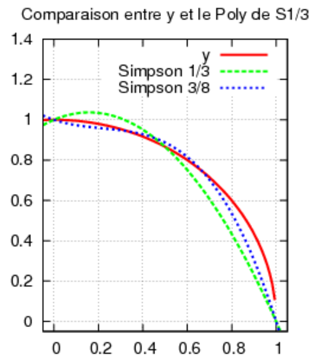
$\boxed{\textbf{4}}$

On obtient, par la méthode de Simpson (3/8) en quadrature simple, donc pour quatre points équidistants (ou trois intervalles) donc pour $h = \frac{(1-0)}{3} = \frac{1}{3}$ (et pour les points $[x = 0 : y = 4]$, $[x = 0.333 : y = 3.771]$, $[x = 0.666 : y = 2.981]$ et $[x = 1.0 : y = 0]$

$$\begin{aligned} I_{\text{Simpson (3/8)}} &= \frac{1 \times 3}{3 \times 8}\,\Big(f(0) + 3f(0.\overline{3}) + 3f(0.\overline{6}) + f(1)\Big) \\ I_{\text{Simpson (3/8)}} &\approx \frac{1}{8}\,\Big(4 + 11.313 + 8.943 + 0\Big) \\ I_{\text{Simpson (3/8)}} &\approx 3.032 \end{aligned}$$

<**5 pts**>

Nota : Il est normal de retrouver exactement ce que l'on avait trouvé pour la question précédente car la formule de Simpson 3/8 (qquadrature simple) est définie précisément comme étant l'intégrale sous le polynôme de collocation (unique) de degré 3.



$\boxed{5}$

En faisant le changement de variable $x = \frac{1}{2}(t+1)$ ou $t = 2x - 1$, $(dx = (1/2)dt)$,
<**1 pt**>

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{4}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{1-\frac{1}{4}(t+1)^2}\,dt \qquad <\textbf{2 pts}> \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{4-(t+1)^2}\,dt \\
&= \sqrt{4-(-\frac{\sqrt{3}}{3}+1)^2} + \sqrt{4-(\frac{\sqrt{3}}{3}+1)^2} \qquad <\textbf{2 pts}> \\
&\approx 1.95483 + 1.22962 \\
&\approx 3.18445 \qquad <\textbf{2 pts}>
\end{aligned}$$

IV. Résolution d'Équation Différentielle (12 pts)

1. Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = f(t, y(t)) = 1 + t^2 + y(t) \tag{4}$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t=0) = 1$.

(a) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y_1 = y(0.1)$ et $y_2 = y(0.2)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
<**4 pts**>

(b) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(0.1)$ et $y(0.2)$, (arrondisser et garder au moins quatre décimales).
<**4 pts**>

(c) Résoudre cette équation différentielle avec la méthode du point milieu et toujours avec un pas $h = 0.1$. Calculer seulement $y(0.1)$ et $y(0.2)$, (arrondisser et garder au moins quatre décimales). <**4 pts**>

Réponse

$\boxed{\textbf{1(a)}}$

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.1$ et $y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(1 + t_n^2 + y_n\right)$$

<**1 pt**>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	1.000
1	0.1	1.200
2	0.2	1.421

<**3 pts**>

$\boxed{\textbf{1(b)}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes :

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\underbrace{\left(1 + t_n^2 + y_n\right)}_{f(t_n,y_n)} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big) = y_n + \frac{h}{2}\big(2 + y_n + \tilde{y}_{n+1} + t_n^2 + t_{n+1}^2\big)$$

<**1 pt**>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	-	1.0000
1	0.1	1.2000	1.2105
2	0.2	1.4326	1.4452

<**3 pts**>

$\boxed{\textbf{1(c)}}$

Par la méthode du point milieu, on a les relations itératives suivantes :

$$\tilde{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}\underbrace{\left(1 + t_n^2 + y_n\right)}_{f(t_n,y_n)} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+\frac{1}{2}}, \tilde{y}_{n+\frac{1}{2}})$$

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_{n+\frac{1}{2}}$ sont reportées ci-dessous (avec $y_0 = 1$) :

$$\begin{aligned}
y_{0+\frac{1}{2}} &= y_0 + \frac{h}{2}f(t_0, y_0) = 1 + 0.05(1 + 0 + 1) = 1.1 \\
y_1 &= y_0 + hf(t_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}}) = 1 + 0.1(1 + 0.0025 + 1.1) = 1.2103 \\
y_{1+\frac{1}{2}} &= y_1 + \frac{h}{2}f(t_1, y_1) = 1.2103 + 0.05(1 + 0.001 + 1.2103) = 1.3213 \\
y_2 &= y_1 + hf(t_{1+\frac{1}{2}}, y_{1+\frac{1}{2}}) = 1.2103 + 0.1(2.3438) = 1.4446
\end{aligned}$$

<**4 pts**>

V. Système d'Équations Différentielles (10 pts)

$$\text{Soit l'équation :} \quad x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = 2\sin(t)$$

avec les conditions initiales $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.
On vous demande de :

1. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <4 pts>
2. Trouver le système de relations itératives utilisant la méthode des séries de Taylor d'ordre local en h^3 permettant de résoudre ce système d'équations différentielles.
   <6 pts>

Réponse

1.

En posant, $x_0(t) = x(t)$, $x_1(t) = x'(t)$ et $x_2(t) = x''(t)$, on trouve immédiatement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} x_0'(t) &= x_1(t) \\ x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= 2\,x_2(t) - x_1(t) + 2\,\sin(t) \end{cases}$$

<3 pts>

Avec les conditions initiales $x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = 1.0$.
<1 pts>

2.

$$\begin{cases} x_0(t_{n+1}) &= x_0(t_n) + h\,x_0'(t_n) + \frac{h^2}{2}\left[x_0''(t_n)\right] \\ x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n) + h\,x_1'(t_n) + \frac{h^2}{2}\left[x_1''(t_n)\right] \\ x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n) + h\,x_2'(t_n) + \frac{h^2}{2}\left[x_2''(t_n)\right] \end{cases}$$

C'est à dire, puisque $x_2''(t) = 2\,x_2'(t) - x_1'(t) + 2\,\cos(t) = 4\,x_2(t) - 2\,x_1(t) + 4\,\sin(t) - x_2(t) + 2\,\cos(t)$, et après simplification : $x_2''(t) = 3\,x_2(t) - 2\,x_1(t) + 4\,\sin(t) + 2\,\cos(t)$:

$$\begin{cases} x_0(t_{n+1}) &= x_0(t_n) + h\,x_1(t_n) + \frac{h^2}{2}\left[x_2(t_n)\right] \\ x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n) + h\,x_2(t_n) + \frac{h^2}{2}\left[2\,x_2(t_n) - x_1(t_n) + 2\,\sin(t)\right] \\ x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n) + h\left[2\,x_2(t_n) - x_1(t_n) + 2\,\sin(t)\right] + \frac{h^2}{2}\left[3\,x_2(t_n) - 2\,x_1(t_n) + 4\,\sin(t_n) + 2\,\cos(t_n)\right] \end{cases}$$

<6 pts>