DIRO
IFT 2425

EXAMEN INTRA

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

Date : *19/02/2015*

I	Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (18 pts)
II	Erreur en Arithmétique Flottante (48 pts)
III	Méthode du Point Fixe/Newton/Bissection (44 pts)
IV	Calcul Matriciel (12 pts)
Total	122 points.

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Mesure d'Incertitude et Amplification d'Erreur (18 pts)

1. Soit la fonction que nous avons utilisée dans le devoir 1. dans une relation itérative de Newton (pour la recherche de la racine de $f(.)$).

$$f(c_{\text{MV}}; y_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i^{c_{\text{MV}}} \ln y_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} y_i^{c_{\text{MV}}}} - \frac{1}{c_{\text{MV}}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \ln y_i = 0 \tag{1}$$

On aimerait savoir (pour nous rassurer) si cette fonction est numériquement stable, *i.e.,* si l'incertitude Δy_i associée à chaque donnée y_i ne va pas trop croître ou s'amplifier durant la procédure itérative de Newton (et possiblement faire diverger l'algorithme itératif qui ne parviendra pas à approcher la solution).

(a) On va supposer, pour simplifier le problème que $c_{\text{MV}} = 1$ (en fait, on sait qu'expérimentalement c_{MV} restera assez proche de 1), et, en utilisant l'approximation de Taylor de la fonction au premier ordre, on vous demande de donner l'expression analytique de l'incertitude sur f (Δf_1) si y_1 à l'incertitude Δy_1 et que les autres y_i sont des variables certaines (*i.e.*, sans erreur).
<**8 pts**>

(b) Si les N y_i sont entachés d'erreur Δy_i, exprimer analytiquement l'incertitude totale Δf (sans utiliser le Tab. 1, c'est-à-dire sans application nmérique).
<**5 pts**>

TAB. 1 – Valeurs des $N = 10$ points de données y_i

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
0.11	0.24	0.27	0.52	1.13	1.54	1.71	1.84	1.92	2.01

(c) En utilisant le tableau 1 ci-dessus et aussi le fait que $\sum_{i=1}^{N} y_i \approx 11.29$, $\sum_{i=1}^{N} y_i \ln y_i \approx 4.22$, $(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2 \approx 127.46$ et $N = 10$, trouver numériquement l'incertitude Δf_1 si y_1 à l'incertitude Δy_1 (et que les autres y_i sont des variables sans erreur), puis l'incertitude Δf_5 si y_5 à l'incertitude Δy_5 (et que les autres y_i sont des variables sans erreur) puis l'incertitude Δf_{10} (et que les autres y_i sont des variables sans erreur).
<**5 pts**>

Réponse

1.(a)

Pour calculer l'incertitude de f, on doit calculer la différentielle Δf. Si y_1 est la seule variable incertaine, alors :

<**8 pts**>

$$\Delta f_1 = \left| \frac{\left[(\ln y_1 + 1) \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i\right] - \sum_{i=1}^{N} (y_i \ln y_i)}{(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2} - \frac{1}{N} \frac{1}{y_i} \right| \cdot \Delta y_1$$

1.(b)

Si les N y_i sont entachés d'erreur Δy_i, l'expression analytique de l'incertitude totale Δf est :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{N} \left(\left| \frac{\left[(\ln y_i + 1) \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i\right] - \sum_{i=1}^{N} (y_i \ln y_i)}{(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2} - \frac{1}{N} \frac{1}{y_i} \right| \cdot \Delta y_i \right)$$

<5 pts>

1.(c)

On trouve $\Delta f_1 \approx 1.049$, ($\Delta f_2 \approx 0.48$ non demandé) $\Delta f_5 \approx 0.022$ et $\Delta f_{10} \approx 0.0675$.
<5 pts>

Nota : On constate que pour la fonction $f()$ n'amplifiera pas trop les erreurs car au maximum, on aura : $\Delta f \approx 2$. A chaque itération de l'algorithme de Newton, deux forces s'opposeront ; la première est de converger en utilisant la relation itérative de Newton, c'est-à-dire en approximant $f()$ au voisinage de la racine par sa tangente et la deuxième force sera de diverger à cause d'une fonction qui amplifie à chaque itération deux fois les erreurs numériques. La convergence sera la plus forte. Un exemple ou la force de divergence est plus grande à cause de l'amplification des erreurs numériques est donné dans l'exemple de la question I.2a de l'examen intra 2014.

II. Erreur en Arithmétique Flottante (48 pts)

1. Considérons les deux expressions polynomiales suivantes (mathématiquement équivalentes) :

$$P_1(x) = (x-1)^7 \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^7 - 7\,x^6 + 21\,x^5 - 35\,x^4 + 35\,x^3 - 21\,x^2 + 7\,x - 1$$

   où la deuxième expression, $P_2(x)$, est simplement le développement à la puissance 7 du polynôme $P_1(x)$. Identifier l'expression qui sera la plus sensible aux erreurs numériques. Expliquer clairement pourquoi et identifier aussi pour quelle valeur de x.
   <8 pts>

2. Soit la série suivante :

$$\pi^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{6}{n^2}$$

   Proposer une stratégie et justifier la pour arriver à l'estimation de cette somme avec le maximum de précision (si on est obligé de se limiter au calcul de celle-ci avec des DOUBLE et si on prend par exemple 2 milliards de termes).
   <5 pts>

3. On voudrait estimer avec le plus de précision, le développement limité de $[-1 + \exp(-x)]$ au voisinage de $x = 0$ en utilisant la série de Taylor. Donner ce développement limité et proposer une stratégie (en la justifiant) qui permettrait d'arriver à l'estimation de la somme de cette série avec le maximum de précision.
   <7 pts>

4. Les institutions bancaires sont souvent confrontées au problème suivant ; si on considère un dépôt de $P = 100\,\$$ tous les jours dans un compte en banque possédant un taux d'intérêt annuel de $i = 0.06$ (6%), calculé tous les jours, le montant d'argent accumulé à la fin de l'année ($N = 365$ jours dans l'année) est donné par :

$$\text{Montant d'argent accumulé} = P = \left(\frac{\big(1 + (i/N)\big)^N - 1}{i/N} \right)$$

   Expliquer pourquoi le calcul numérique de cette expression peut conduire à des erreurs numériques. En 1982, Hewlett-Packard proposa une formule permettant de calculer plus précisément $\ln(1+x)$ pour de petites valeurs de x. Cette formule est la suivante :

$$\frac{x\,\ln(1+x)}{(1+x)-1}$$

Comment peut-on utiliser cette dernière formule pour améliorer la précision du calcul de P ?
<5 pts>

5. Expliquer pourquoi le calcul numérique de ces trois expressions

   (a) $\log x - \log y$
   (b) $\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^2}$
   (c) $\cos(x) - \cos(2x)$

   peuvent conduire à des problèmes d'erreurs numériques (identifier aussi pour quelle valeur de x). Identifier et citer le problème numérique associé et proposer une expression mathématiquement équivalente qui permettrait d'éviter ces problèmes numériques et/ou augmenter la précision des calculs de ces trois expressions.
   <12 pts>

6. Soit le code en language C suivant :

```
float x=0.01;
float y=0.02;
float z=0.03;
float val1=(x+y)+z;
float val2=x+(y+z);
if (val1==val2) printf("les nombres sont égaux");
else printf("val1=%.10f et val2=%.10f sont différents",val1,val2);
```

   Expliquer ce qui va se produire à l'exécution de ce code, expliquer aussi pourquoi et corriger ce code comme un bon informaticien devrait le faire.
   <6 pts>

7. Montrer que ces deux expressions sont équivalentes mathématiquement mais que l'une d'entre elles, que l'on précisera, est instable numériquement autour d'un voisinage de x que l'on précisera aussi.

$$E_1(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \text{et} \qquad E_2(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

   <6 pts>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1}}$

Pour $P_1(x)$, on aura un problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux qui se produiront lorsque $x \to 1$. Même chose pour $P_2(x)$, mais à cela s'ajoute une incertitude totale du résultat qui sera plus grande parce que $P_2(x)$, implique un nombre plus grand de valeurs incertaines.

À noter que dans la première expression, quand $x \to 1$, ce problème est moins grave car un seul des deux nombres (*i.e.*, x) n'aura pas de représentation exacte (1 à une representation exacte en binaire) contrairement à la deuxième expression dans laquelle on a (lorsque $x \to 1$), en fait, une somme de soustraction (mise à part la première somme), où les deux nombres de chaque somme sont approximés et quasi égaux. En effet, l'expression $P_2(x)$ peut s'écrire :

$$P_2(x) = (x^7 - 1) + (7\,x - 7\,x^6) + (21\,x^5 - 21\,x^2) + (35\,x^3 - 35\,x^4)$$

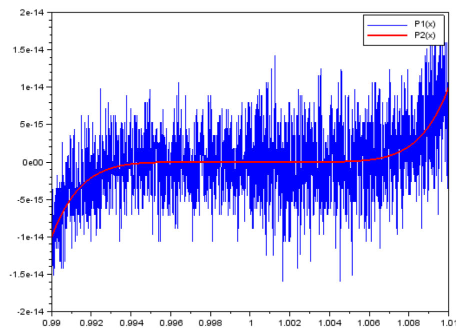
où encore comme celle-ci :

$$P_2(x) = (x^7 - 7\,x^6 + 21\,x^5 - 35\,x^4) - (-35\,x^3 + 21\,x^2 - 7\,x - 1)$$

dans laquelle on a la soustraction de deux nombres quasi égaux et qui ont, tous les deux, une incertitude (ou approximation) beaucoup plus grande que dans le cas de $P_1(x)$ (car faisant intervenir plus de termes incertains).

On peut exprimer cela différemment (mais de façon équivalente), en disant que le résultat de la somme des termes de $P_2(x)$ conduira à une approximation du résultat autour d'une valeur nulle (quand $x \to 1$) et à une incertitude qui sera grande ; car celle-ci étant la somme de nombreux termes incertains (conduisant ainsi à une erreur relative du résultat très grand et donc à une grande instabilité numérique de l'expression).
<8 pts>

Nota : Si on trace les deux graphes associés à ces deux polynômes au voisinage de 1, on voit tout de suite que $P_2(x)$ est beaucoup plus instable numériquement.



$\boxed{2}$

Pour éviter l'erreur de décalage en notation flottante, qui intervient lorsqu'on additionne deux nombres d'ordre de grandeur différente, il serait préférable d'additionner les termes de cette série en sens inverse : $\sum_{n=2\cdot 10^9}^{n=0}(\frac{6}{n^2})$. Ainsi, calculée en sens inverse, la somme partielle sera du même ordre de grandeur que le terme suivant additionné à la série, minimisant de ce fait l'erreur de décalage qui intervient en notation flottante lorsqu'on additionne deux nombres d'ordre de grandeur différente (et provenant du fait que dans la somme ou la soustraction de ces deux nombres, l'exposant du nombre le plus faible doit s'ajuster à l'exposant du nombre le plus fort).
<5 pts>

Nota : Si on utilise une somme en DOUBLE, respectivement avec une somme dans le sens directe et inverse, on obtiendrait (la valeur correcte de π est $\pi = 3.1415926535$) :

Nb. de termes	Sens directe	Sens inverse
$128 \cdot 10^6$	3.1415926436	3.1415926461
$512 \cdot 10^6$	3.1415926463	3.1415926517
$2048 \cdot 10^6$	3.1415926463	3.1415926531

$\boxed{3}$

L'approximation de $\exp(-x)$ au voisinage de $x = 0$ s'écrit de la façon suivante :

$$-1 + \exp(-x) = -1 + \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} = -\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Si on calcule cette série dans le sens direct ou dans le sens inverse, on aura une succession de problèmes d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux. Si on veut de la précision alors il faudrait, idéalement additionner tous les termes négatifs en sens inverse pour minimiser l'erreur de décalage qui intervient en notation flottante lorsqu'on additionne deux nombres d'ordres de grandeur différentes, même chose pour les termes positifs de cette série puis addtionner ensuite ces deux sommes.

Une autre possibilité est de noter que : $-1+\exp(-x) = -1 + \dfrac{1}{\exp(x)} = -1 + \dfrac{1}{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}}$

et donc calculer le dénominateur en sens inverse pour minimiser l'erreur de décalage puis d'inverser le résultat et ajouter 1.
<7 pts>

Nota : Si on utilise 10000 termes et $x = 0.01$, on aura une erreur de .00005000023239 avec la stratégie somme descendante des termes positives et négatives puis addition de ces deux sommes partielles, et une erreur de 0.00000010678477 avec la stratégie $-1 + \exp(-x) = -1 + (1/\exp(x))$ qui est donc la plus efficace.

$\boxed{4}$

L'expression $[1+(i/N))^N - 1]$ fera intervenir un problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux (en fait seulement un des deux sera approximé puisque 1 à une représentation exacte). (De plus si N grand, l'erreur de décalage, du à la somme de deux flottants d'ordre de grandeur différentes, est aussi possible dans cette expression ; bien que dans ce cas, N est fixé à 365 ici).

On peut réécrire cette expression en utilisant le fait que $a^x = \exp(x\ln(a))$ et donc en réécrivant $[1 + (i/N))^N - 1] = \exp(N \cdot \ln(1 + (i/N))$ pour laquelle $\ln(1 + x)$ devra être bien approximé pour de faible x. Depuis 1982, avec la formule trouvée par Hewlett-Packard, cela permet donc d'estimer P avec un minimum d'erreur numérique.
<5 pts>

Nota : Le calcul exact est $P = 37614.05$. Avec des FLOAT en utilisant mon ordinateur, je trouve en utilisant la formule brute ; $P = 37615.453125$ (une différence d'un dollar et cinquante sous en faveur du déposant !) et avec la formule modifiée et utilisant l'approximation proposée par HP ; $P = 37614.046875$ (une différence de moins de deux sous).

$\boxed{5}$

Dans les trois cas, on aura un problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux. Pour éviter ce problème, on doit écrire ces relations de telle façon que plus aucune soustraction de deux nombres incertains (i.e., imprécis) quasi-égaux apparaissent.

[-a-] Pour la première expression, cette annulation de cse se passe lorsque $x \to y$. Dans ce cas, il vaut mieux la ré-écrire de la façon suivante :

$$\log x - \log y = \log\Big(\frac{x}{y}\Big)$$

[-b-] Pour la deuxième expression, cette annulation de cse se passe lorsque $x \to 0$ et en utilisant le conjugué, on peut ré-écrire cette expression de la façon suivante :

$$\sqrt{1+x^4} - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^4+x^2}{\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1-x^2}}$$

[-c-] Pour la troisième expression, cette annulation de cse se passe lorsque $x \to 0$ (modulo $2k\pi$) mais que l'on peut ré-écrire :

$$\cos(x) - \cos(2x) = 2\sin(3x/2) \cdot \sin(x/2)$$

<12 pts>

$\boxed{6}$

Les nombres 0.01, 0.02 et 0.03 n'ont pas de représentation exacte en numérotation flottante. De ce fait, ils seront tous les trois approximés avec un arrondissement. Il en va de même de la somme $(x+y)$ ou $(y+z)$ qui seront toutes les deux arrondies. Au final, la somme $(x+y)+z)$ et $(x+(y+z)$ seront tous les deux arrondis différemment ! et on retrouve ici un bon exemple du fait qu'en notation flottante, on a plus l'associativité de l'addition. À cause de cela, le programme affichera à l'écran :VAL1 ET VAL2 SONT DIFFÉRENTS. Pour prendre en compte le fait qu'il est dangereux de comparer des flottants (qui n'ont pas de représentation exacte) directement, il aurait été judicieux de remplacer l'avant-dernière ligne du code par IF (ABS(VAL1-VAL2) $<$ 1.0E-8) PRINTF(" LES NB SONT ÉGAUX ...") ; avec $1.0\,E-08$ une erreur qui ne devrait pas être plus petite que l'erreur d'arrondie fait par la machine pour l'estimation numérique (arrondie) de val1 ou val2. Donc :

```
float x=0.01;
float y=0.02;
float z=0.03;
float val1=((x+y)+z);
float val2=(x+(y+z));
if (fabs(val1-val2)<1.0e-8) printf("les nombres sont égaux");
else printf("val1=%.10f et val2=%.10f sont différents",val1,val2);
```

Une autre façon de corriger ce code est de faire en sorte que x, y et z est une representaton exacte ; ce qui est possible en écrivant :

```
float x=1;
float y=2;
float z=3;
float val1=((x+y)+z)/100;
float val2=(x+(y+z))/100;
if (val1==val2) printf("les nombres sont égaux");
else printf("val1=%.10f et val2=%.10f sont différents",val1,val2);
```

<6 pts>

Nota : En C, mon ordinateur donne pour l'exécution du programme non corrigé : VAL1=0.0599999987 ET VAL2=0.0599999949 SONT DIFFÉRENTS soit une erreur de $3.8\,E-09$.

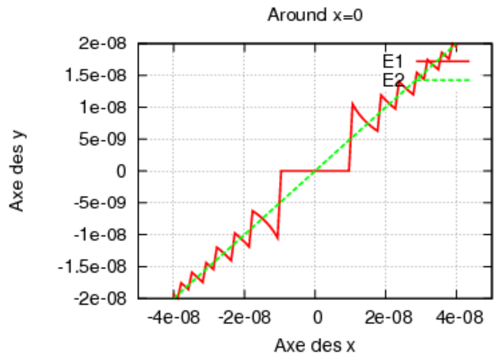
$\boxed{7}$

Le plus simple dans ce cas pour montrer que $E_1(x)$ et $E_2(x)$ sont équivalentes consiste à montrer que $E_1(x)/E_2(x)$:

$$\frac{E_1(x)}{E_2(x)} = \frac{(1-\cos x)}{\sin x}\frac{(1+\cos x)}{\sin x} = \frac{(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1$$

Donc nous sommes en présence de deux expressions mathématiquement équivalentes et celle qui est instable numériquement est $E_1(x)$ qui fait apparaitre, quand $x \to 0$, un problème d'annulation de cse (chiffres significatifs exactes) due à la soustraction de deux nombres approximés quasi égaux (en fait seulement un des deux sera approximé puisque 1 à une représentation exacte). et un problème de calcul d'une expression du type 0/0.
<6 pts>

Nota : Si on trace les deux graphes associés à ces deux expressions au voisinage de 0, on voit tout de suite que $E_1(x)$ est instable numériquement autour de ce voisinage.



III. Méthode du Point Fixe/Newton/Bissection (44 pts)

On se propose de trouver numériquement une valeur approchée d'une racine de la fonction

$$f(x) = \cos(x) - x\exp(x) \tag{2}$$

1. Méthode du Point Fixe
   (a) Montrer qu'il existe une racine unique r pour cette Eq. (2) dans l'intervalle $J = [1/2, \pi/2]$. En remarquant que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g_1(x) = x$ avec $g_1(x) = \cos(x)\exp(-x)$, montrer que l' intervalle J est un intervalle sur lequel la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe est assurée.
   <7 pts>
   (b) Utiliser le résultat de la question précédente pour calculer les 6 premières estimées $r_1, \ldots, r_6$, en partant de $r_0 = 0.5$.
   <6 pts>
   (c) Trouver une fonction $g_2(x)$ équivalente à l'équation $f(x) = 0$ et pour laquelle vous demontrerez qu'elle n'est pas contractante sur J (i.e., pour laquelle la convergence vers une solution unique par la méthode du point fixe n'est pas assurée).
   <5 pts>
   (d) Pour obtenir à l'avance le nombre d'itérations nécessaires de la méthode du point fixe pour arriver à la racine souhaitée avec la précision voulue, on peut essayer de trouver (en utilisant le théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne) une majoration du type $|r_n - r| \leq K$, ou r_n désigne la valeur approchée, à la ni-ème itération, de cette racine. Trouver cette majoration et en déduire le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir, par cette méthode, une valeur approchée à 10^{-2} près de cette racine.
   <5 pts>
2. Méthode de la Bissection
   (a) Si on avait utilisé la méthode de la bissection, avec combien d'itérations serait-on arrivé à une valeur approchée de la racine à 10^{-2} près ? (Nota : on vous demande d'obtenir une estimation de ce nombre en utilisant les propriétés de la méthode de la bissection mais sans calculer les différentes estimations $r_0, r_1, \ldots,$ données par cette méthode.)
   <6 pts>
3. Méthode de Newton
   (a) Donner la relation itérative $r_{n+1} = g_{\text{newt.}}(r_n)$ intervenant dans la méthode itérative de Newton pour la résolution itérative de la racine r de l'équation $f(x) = 0$.
   <5 pts>

(b) Montrer qu'avec $r_0 = 0.5$, la relation itérative de Newton converge.
<5 pts>

(c) Calculer les 4 premières estimées $r_1, \ldots, r_4$, en partant de $r_0 = 0.5$.
<5 pts>

Réponse

1.(a)

L'étude des variations de la fonction f sur $J = [1/2, \pi/2]$ montre que la fonction est continue et décroissante sur J (donc monotone) (car $f'(x) = -\sin(x) - (\exp(x) + x\exp(x)) < 0$ sur $J = [1/2, \pi/2]$).
<1.5 pts>

De plus, on a $f(1/2) \approx 0.053$ et $f(\pi/2) \approx -7.55$ donc $f(1/2)f(\pi/2) < 0$ et puisque la fonction f est continue et décroissante sur J, il existe donc une racine r unique dans cet intervalle.
<1.5 pts>

On trouve facilement que : $f(x) = 0$ est équivalent à l'équation $x = \exp(-x)\cos(x) = g_1(x)$,
en effet : $\cos(x) - x\exp(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(-x)\cos(x)$
<1.5 pts>

avec $g_1'(x) = -\exp(-x)\big(\sin(x) + \cos(x)\big)$ et $g_1''(x) = 2\exp(-x)\sin(x)$. Comme $g_1''(x) > 0, \quad \forall x \in J$, on peut en déduire que $g_1'(x)$ est croissante et croitra de $g_1'(x = 1/2) \approx -0.82$ à $g_1'(x = \pi/2) \approx -0.207$.
De ce fait, $|g_1'(x)| < 1 \quad \forall x \in J$, et la convergence de ce point fixe est assurée.
<2.5 pts>

1.(b)

En partant de $r_0 = 0.5$, on a, $r_n = g_1(r_{n-1})$ et,

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.5322807302 \\
r_2 &= 0.5060171508 \\
r_3 &= 0.5273387575 \\
r_4 &= 0.5099980322 \\
r_5 &= 0.5240808264 \\
r_6 &= 0.5126303136
\end{aligned}
$$

qui va converger doucement vers la valeur $r = 0.5177573637$.
<6 pts>

1.(c)

$f(x) = 0$ est équivalent à $x = g_2(x) = x + \cos(x) - x\exp(x)$. Sur J, $g_2(x)$ ne convergera pas car $|g_2'(x)| = |1 - \sin(x) - (\exp(x) + x\exp(x))| > 1$ sur J pour $x = \pi/2$; en effet $|g_2'(x = \pi/2)| = 12$. (un contre exemple suffit).

<5 pts>

Nota :

▹ $f(x) = 0$ est équivalent aussi à $x = g_2(x) = \ln[(\cos(x))/x]$. Sur J, cette forme de $g_2(x)$ n'est pas contractante car $|g_2'(x)| = |(-x\sin(x) - \cos(x))/(x\,\cos(x))|$ et $|g_2'(0.5)| = 2.66 > 1$.

▹ $f(x) = 0$ est équivalent aussi à $x = g_2(x) = \arccos[x\exp(x)]$ qui n'est pas défini pour $x = \pi/2$.

1.(d)

En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on obtient, puisque $g(r) = r$ et $r_n = g(r_{n-1})$ avec r_n la valeur approchée de la racine à la n-ième itération

$$\begin{aligned} r_n - r &= \frac{g(r_{n-1}) - g(r)}{(r_{n-1} - r)} \times (r_{n-1} - r) \\ &= g'(\zeta) \times (r_{n-1} - r) \qquad \text{avec} \quad \zeta \in J \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $|g'(\xi)| < 0.82$, on obtient les inégalités suivantes

$$|r_n - r| \leq (0.82)\,|r_{n-1} - r| \quad \leq \quad (0.82)^2\,|r_{n-2} - r| \leq \ldots \leq (0.82)^n\,(\pi/2 - 1)$$

On obtiendra donc $|r_n - r| < 10^{-2}$ dès que $\overbrace{(\pi/2 - 1/2)}^{\approx 1.07} \times (0.82)^n < 10^{-2}$, i.e., dès que $n = 24$ montrant que cela converge assez lentement.

<5 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

La méthode de la bissection permet de construire à partir de l'intervalle $[1/2, \pi/2]$ de largeur ≈ 1.07 contenant r, un nouvel intervalle de longueur moitié contenant r. En appliquant n fois consécutives la méthode, on obtient un intervalle de longueur $\approx 1.07/2^n$ contenant r. À l'itération n, on a un majorant de l'erreur absolu donné par $\Delta r = \frac{|\pi/2 - 1/2|}{2^n}$. Or on veut $\Delta r < 10^{-2}$, donc $2^n > 1.07 \times 10^2 = 107$, ce qui, dans notre cas est vrai des que $n = 7$. Ce nombre d'itérations est à comparer avec $n = 24$ obtenu pour la méthode itérative du point fixe précédente.
<6 pts>

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$

La fonction $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la méthode itérative de Newton permet d'écrire :

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n - \frac{\cos(r_n) - r_n \exp(r_n)}{-\sin(r_n) - \exp(r_n) - r_n \exp(r_n)} = r_n + \frac{\cos(r_n) - r_n \exp(r_n)}{\sin(r_n) + \exp(r_n) + r_n \exp(r_n)}$$

<5 pts>

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$

Dans ce cas, le plus simple est de montrer que la fonction $f(x)$, sur l'intervalLe $J = [1/2, \pi/2]$ (intervalle dans lequel on prendra $r_0 = 0.5$ et dans lequel une racine unique s'y trouve) ne présente pas d'*extrema*, i.e., de valeurs pour laquelle, $f'(x)$ s'annule.

Dans notre cas, $f(x) = \cos(x) - x\exp(x) = 0$ et $f'(x) = -(\sin(x) + \exp(x) + x\exp(x)) < 0$, toujours négative sur J donc aucun problème !
<5 pts>

Nota : Il aurait été beaucoup moins facile de démontrer que cette suite itérative de Newton converge en considérant le fait que cette suite est aussi un point fixe du type $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et que, pour que la convergence ait lieu, $|g'_{\text{newt.}}(\xi)| < 1, \;\; \forall \xi \in J$.

$\boxed{\textbf{3.(c)}}$

En partant de $r_0 = 0.5$, on a, $r_n = g_{\text{newt.}}(r_{n-1})$ et :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.5180260093 \\ r_2 &= 0.5177574241 \\ r_3 &= 0.5177573637 \\ r_4 &= 0.5177573637 \end{aligned}$$

<5 pts>

Nota : Sur ma calculatrice, l'estimation se stabilise très rapidement, à partir de $r_3 = 0.5177573637$!! (à comparer avec la méthode du point fixe précédente qui se stabilisait à partir de $r_{>100}$). Cela nous indique aussi que la fonction dont on cherche la racine est très très linéaire au voisinage de la racine.

IV. Factorisation LU (12 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode de la factorisation directe.
   <8 pts>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

2. Donner la complexité algorithmique nécéssaire pour trouver une matrice inverse soit 1]- par une méthode de pivot de Gauss puis substitutions, 2]- une décomposition LU par Gauss puis substitutions avants et arrières 3-] une décomposition LU par Factorisation directe puis substitutions avants et arrières.
   <4 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par factorisation directe, on trouve *directement* :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 15 \\ 2 & 8 & 27 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{L<\textbf{4 pts}>} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U<\textbf{4 pts}>}.$$

<8 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

1]$-$ $0(n^3/3) + n \cdot O(n^2/2) = 5/6n^3$ (triangulation de la matrice puis n substitutions arrières).

2]$-$ $0(n^3/3) + n \cdot O(n^2) = 4/3n^3$ (décomposition LU par Gauss puis n substitutions avant et arrières).

3]$-$ $0(n^3) + n \cdot O(n^2) = 2n^3$ (décomposition LU par fact. directe puis n substitutions avant et arrières).

<4 pts>