DIRO
IFT 2425

EXAMEN FINAL

Max Mignotte

DIRO, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, local 2377
Http : //www.iro.umontreal.ca/∼mignotte/ift2425/
E-mail : mignotte@iro.umontreal.ca

date : *21/04/2016*

I	Moindres Carrés (47 pts)
II	Calcul Matriciel (20 pts)
III	Interpolation & Dérivation Numérique (27 pts)
IV	Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)
V	Système d'Équations Différentielles (15 pts)
Total	119 points

TOUS DOCUMENTS PERSONNELS, CALCULATRICES ET CALCULATEURS AUTORISÉS

I. Moindres Carrés (47 pts)

On dispose de deux ensembles de données (ou couples d'observations), notés respectivement $(x_{i,j}, y_{i,j})$. On désigne ces couples d'observations avec un double indice. Le premier indice j désigne le groupe ; il vaut donc 1 ou 2. Le second indice i désigne le rang de l'observation dans le groupe et varie de 1 à n_1 dans le premier groupe et de 1 à n_2 dans le deuxième groupe. En résumé, on dispose donc des données suivantes :

1. $(x_{1,i}\ ;\ y_{1,i})_{i=1,\ldots,n_1}$ 2. $(x_{2,i}\ ;\ y_{2,i})_{i=1,\ldots,n_2}$

Dans notre exemple numérique, $n_1 = 5$ et $n_2 = 4$, et les données sont résumées dans les deux tableaux ci-dessous :

$x_{1,i}$	0	2	4	6	8
$y_{1,i} = y_1(x_{1,i})$	3	10	29	43	49

$x_{2,i}$	3	4	5	6
$y_{2,i} = y_2(x_{2,i})$	33	41	41	47

On sait que ces deux jeux de donnés doivent se distribuer selon deux droites ayant la même **pente** mais pas la même ordonnée à l'origine. C'est-à-dire que l'on doit ajuster **simultanément** les deux relations suivantes :

$$y_{1,i} = a_1 + b\, x_{1,i} \qquad \text{et} \qquad y_{2,i} = a_2 + b\, x_{2,i}$$

qui dépendent donc de trois paramètres, *i.e.*, le paramètre b qui est la pente commune de ces deux droites (parallèles) et les paramètres a_1 et a_2 qui sont respectivement les deux ordonnées à l'origine de ces deux droites.
Une façon d'estimer, au sens des moindres carrés, ces trois paramètres est de considérer le résidu ou écart quadratique suivant :

$$R(a_1, a_2, b) = \sum_{i=1}^{n_1} \Big(y_{1,i} - \big(a_1 + b\, x_{1,i}\big)\Big)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \Big(y_{2,i} - \big(a_2 + b\, x_{2,i}\big)\Big)^2 \tag{1}$$

qui devra être minimisé par cette méthode des moindres carrés.

———————

1. (a) Donner les équations normales permettant de trouver les coefficients a_1, a_2, b, qui minimisent l'Eq. (1) par la méthode algébrique (*i.e.*, la méthode utilisant les dérivés).
<12 pts>

   (b) Résoudre le système d'équations donné par les équations normales précédentes.
On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel certaines/toutes de ses égalités vous permettront de sauver du temps de calcul pour la résolution de cette question.
<8 pts>

$\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} = 20$	$\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} = 18$
$\sum_{i=1}^{n_1} y_{1,i} = 134$	$\sum_{i=1}^{n_2} y_{2,i} = 162$
$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2 = 206$	$\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i} y_{j,i} = 1536$

———————

2. (a) On va maintenant tenter de résoudre ce problème d'ajustement de courbe au sens des moindres carrées en identifiant la solution de notre problème (*i.e.*, le vecteur solution $x = (a_1 \quad a_2 \quad b)^t$) comme étant la solution d'un système sur-dimensionné d'équations linéaires $\mathbf{A}\, x = \mathbf{b}$ dont les

coefficients (de **b**) sont entachés de bruit.
Dans ce but, trouver la matrice **A**, associée à un système surdéterminé d'équations.
<6 pts>

(b) Exprimer le vecteur solution $x = (a_1 \;\; a_2 \;\; b)^t$, en l'écrivant sous la forme :

$$x = \mathbf{B}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

dans laquelle **B** est une matrice que l'on exprimera en fonction de **A** et on expliquera aussi comment s'arrangent les données y_i.
<5 pts>

(c) Expliquer comment on peut retrouver les équations normales par cette méthode.
<4 pts>

(d) Devrait-on trouver la même solution (i.e., le même $x = (a_1 \;\; a_2 \;\; b)^t$?) que celui trouvée à la question 1.b par cette méthode ? Justifier.
<2 pts>

—————

3. (a) Quelle pourrait être la stratégie d'estimation des paramètres a_1, a_2, b permettant d'exploiter le fait que l'on sait que le deuxième jeu de données $(y_{2,i}\,;\,x_{2,i})_{i=1,\ldots,N_2}$ était deux fois moins bruité que le premier ? (Dire qualitativement qu'elle pourrait être une stratégie sans calculer les coefficients a_1, a_2, b).
<3 pts>

(b) Supposons que les deux jeux de données soient entachées d'un bruit gaussien de même variance et que nous disposions de plus de données que dans cet exemple (*i.e.* ; $N = n_1 + n_2$ beaucoup plus grand que 9). Une fois les paramètres a_1, a_2, b estimés, qu'elle pourrait être une stratégie possible pour estimer la variance du bruit entachant les données $y_{j,i}$?
<4 pts>

(c) Si on traite le cas de plus de deux droites (prenons k droites parallèles) qui est une extension directe du cas traité dans cet exemple. De combien d'équations normales (à résoudre) aboutira-t-on ?
<3 pts>

Réponse

$\boxed{\mathbf{1(a)}}$

Trouver les coefficients a_1, a_2 et b au sens des moindres carrés, c'est trouver ces paramètres pour que $R(a_1, a_2, b)$ soit minimal, c'est-à-dire tel que $\frac{\partial R(a_1,a_2,b)}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial R(a_1,a_2,b)}{\partial a_2} = 0$ et $\frac{\partial R(a_1,a_2,b)}{\partial b} = 0$. L'équation normale obtenue par la dérivation par rapport au paramètre a_1 ne concerne que la première somme puisque la seconde somme ne contient pas ce paramètre et donne :

$$\frac{\partial R(a_1, a_2, b)}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n_1}\Big(y_{1,i} - (a_1 + b\,x_{1,i})\Big)\frac{\partial(y_{1,i} - a_1 - b\,x_{1,i})}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n_1}(y_{1,i} - a_1 - b\,x_{1,i})$$

conduisant à la première équation normale : $\quad a_1 n_1 + b\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} = \sum_{i=1}^{n_1} y_{1,i}$

L'équation normale obtenue par la dérivation par rapport au paramètre a_2 ne concerne que la deuxième somme, et on trouve :

$$\frac{\partial R(a_1,a_2,b)}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n_2}\Big(y_{2,i} - (a_2 + b\,x_{2,i})\Big)\frac{\partial(y_{2,i} - a_2 - b\,x_{1,i})}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n_2}(y_{2,i} - a_2 - b\,x_{2,i})$$

conduisant à la seconde équation normale : $\quad a_2 n_2 + b\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} = \sum_{i=1}^{n_2} y_{2,i}$

La troisième équation normale est obtenue en dérivant par rapport à b, et concernera donc les deux sommes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R(a_1,a_2,b)}{\partial b} &= 2\sum_{i=1}^{n_1}(y_{1,i} - a_1 - b\,x_{1,i})\frac{\partial(y_{1,i} - a_1 - b\,x_{1,i})}{\partial b} + 2\sum_{i=1}^{n_2}(y_{2,i} - a_2 - b\,x_{2,i})\frac{\partial(y_{2,i} - a_2 - b\,x_{2,i})}{\partial b} \\
&= -2\sum_{i=1}^{n_1}(y_{1,i} - a_1 - b\,x_{1,i})\cdot x_{1,j} - 2\sum_{i=1}^{n_2}(y_{2,i} - a_2 - b\,x_{2,i})\cdot x_{2,j}
\end{aligned}$$

conduisant à la troisième équation normale :

$$a_1\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} + a_2\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} + b\Big(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i}y_{1,i} + \sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i}y_{2,i}\Big) = 0$$

Cette troisième équation normale peut s'écrire aussi en utilisant les doubles sommations :

$$a_1\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} + a_2\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} + b\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2 - \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}\,y_{j,i} = 0$$

Nous trouvons donc le système d'équations normales suivantes :

$$\left\{\begin{array}{r} a_1\,n_1 + b\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} = \sum_{i=1}^{n_1} y_{1,i} \\ a_2\,n_2 + b\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} = \sum_{i=1}^{n_1} y_{2,i} \\ a_1\,\sum_{i=1}^{n_1} x_{1,i} + a_2\,\sum_{i=1}^{n_2} x_{2,i} + b\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_j} x_{j,i}\,y_{j,i} \end{array}\right.$$

<12 pts>

1(b)

En utilisant les informations données à l'énoncé, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{r} 5\,a_1 + 20\,b = 134 \\ 4\,a_2 + 18\,b = 162 \\ 20\,a_1 + 18\,a_2 + 206\,b = 1536 \end{array}\right.$$

puis par une opération élémentaire pour la dernière ligne ($R_3 = R_3 - \frac{20}{5}R_1$, *i.e.*, $R_3 = R_3 - 4R_1$), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{r} 5\,a_1 + 20\,b = 134 \\ 4\,a_2 + 18\,b = 162 \\ 18\,a_2 + 126\,b = 1000 \end{array}\right.$$

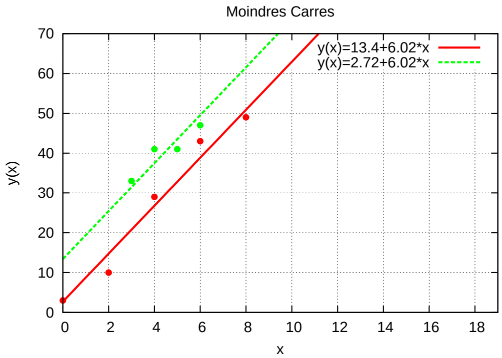
puis par l'opération élémentaire ($R_3 = R_3 - \frac{18}{4}R_2$), *i.e.*, $R_3 = R_3 - 4.5R_2$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{r} 5\,a_1 + 20\,b = 134 \\ 4\,a_2 + 18\,b = 162 \\ 45\,b = 271 \end{array}\right.$$

et par substitution arrière, on trouve finalement $b = 6.02$, $a_2 = 13.4$ et $a_1 = 2.71$.

<8 pts>

Nota : graphiquement, on obtiendrait le graphe ci-dessous :



2(a)

On a facilement (avec $N = n_1 + n_2$) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{1,1} \\ 1 & 0 & x_{1,2} \\ 1 & 0 & x_{1,3} \\ 1 & 0 & x_{1,4} \\ 1 & 0 & x_{1,5} \\ 0 & 1 & x_{2,1} \\ 0 & 1 & x_{2,2} \\ 0 & 1 & x_{2,3} \\ 0 & 1 & x_{2,4} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 = y_{1,1} \\ y_2 = y_{1,2} \\ \vdots \\ y_6 = y_{2,1} \\ y_7 = y_{2,2} \\ \vdots \\ y_N = y_{2,4} \end{pmatrix}}_{b}$$

<6 pts>

2(b)

On résout ce système sur-dimensionné par la méthode de la pseudo-inverse vue en cours et on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{(\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t}_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

<6 pts>

2(c)

Par cette méthode, à partir de $\mathbf{A}x = b$, les équations normales se retrouvent en multipliant par $\mathbf{A}^t$ de part et d'autre de cette équation :

$$\mathbf{A}^t\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{pmatrix} y_1 = y_{1,1} \\ y_2 = y_{1,2} \\ \vdots \\ y_5 = y_{1,5} \\ y_6 = y_{2,1} \\ y_7 = y_{2,2} \\ \vdots \\ y_N = y_{2,4} \end{pmatrix}$$

<4 pts>

2(d)

Oui puisqu'on minimise dans les deux cas le même résidu d'erreur.
<2 pts>

$\boxed{\textbf{3(a)}}$

Une stratégie serait de minimiser :

$$R(a_1, a_2, b) = \sum_{i=1}^{n_1} \Big(y_{1,i} - \big(a_1 + b\, x_{1,i}\big)\Big)^2 + \mathbf{2} \times \sum_{i=1}^{n_2} \Big(y_{2,i} - \big(a_2 + b\, x_{2,i}\big)\Big)^2$$

<3 pts>

Nota : Cette stratégie reviendrait en fait à dupliquer le deuxième jeu de donnée (on lui donne ainsi deux fois plus d'importance car on sait *a priori* que le bruit des données est deux fois moins importantes).

$\boxed{\textbf{3(b)}}$

On sait que plus on a de données, plus les paramètres a_1, a_2, b sont bien estimés. Donc, dans le cas où on a suffisamment de données qui permettent d'affirmer que l'estimation de a_1, a_2, b est infiniment bonne, la variance du bruit entachant les données originales $\{y_{j,i}\}$ et le résidu sont liées par la relation (où $N = n_1 + n_2$) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_1} \Big(y_{j,i} - \big(a_j + b\, x_{j,i}\big)\Big)^2}_{R(a_1,a_2,b)} = \frac{R(a_1, a_2, b)}{N}$$

<4 pts>

Nota : Si on considére l'estimateur de la variance non biasé, alors, on peut proposer aussi : $\sigma^2 = \frac{R(a_1,a_2,b)}{N-1}$

$\boxed{\textbf{3(c)}}$

On aboutit à un système de $(k+1)$ équations normales pour l'estimation des k ordonnées à l'origine et la pente commune.
<3 pts>

II. Factorisation LU (20 pts)

1. Décomposer la matrice A en produit LU (sans permutation) par la méthode assurant des uns ("1") sur la diagonale de la matrice U.
   <8 pts>
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & 18 \\ 20 & 18 & 206 \end{pmatrix}.$$

2. Utiliser la décomposition LU de la question précédente pour résoudre le système :
   <12 pts>
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & 18 \\ 20 & 18 & 206 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134 \\ 162 \\ 1536 \end{pmatrix}$$

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

On parle donc de la factorisation directe et on trouve immédiaement ;

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 4 & 18 \\ 20 & 18 & 206 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 20 & 18 & 45 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

<8 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

On doit d'abord résoudre le système $Ly = b$, *i.e.*,

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 20 & 18 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134 \\ 162 \\ 1536 \end{pmatrix}$$

Par substitution avant, on trouve $y_1 = 26.8$, $y_2 = 40.5$, $y_3 \approx 18.6$. Puis on doit ensuite résoudre le système $Ux = y$, *i.e.* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.8 \\ 40.5 \\ 18.6 \end{pmatrix}$$

qui, par substitution arrière permet de trouver : $x_3 = 6.02$, $x_2 = 13.4$ et enfin $x_1 = 2,71$.

<12 pts>

Nota : On retrouve le système d'équation de l'Exercice I (Question 1(b)) qui était le système permettant d'obtenir une estimation au sens des moindres carrées des paramètres de nos deux droites parallèles et pour lequel on a bien sur trouvé les mêmes paramètres. Donc si on a fait cet exercice avant le premier, on a la chance de sauver quelques minutes de calcul !

III. Dérivation Numérique (27 pts)

1. Dans le slide 8 du cours (chapitre 5 intitulé DÉRIVATION NUMÉRIQUE), on a tabulé la formule numérique d'approximation de la dérivée seconde, en x_0, suivante :

$$f_0'' = f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \quad (+ \mathcal{O}(h^2)) \tag{2}$$

   Retrouver cette formule en utilisant (et en généralisant ici à la dérivée seconde), la même méthode que celle qui a été expliquée en cours, dans le cadre des formules d'approximation de la dérivée première (c'est-à-dire en utilisant exclusivement la ou les dérivée(s) du polynome de Newton-Gregory).
   <8 pts>

2. Retrouver cette fois-ci, cette formule (2) en utilisant seulement la connaissance des formules de dérivée premières.
   <6 pts>

3. Retrouver cette fois-ci, cette formule (2) en utilisant seulement les séries de Taylor.
   <5 pts>

4. Dans le cours, on a trouvé des formules d'approximation de la dérivée première en prenant un certain nombre de termes de la dérivée première du polynôme de Newton Grégory pour $s = 0$ (formule non centrée) et $s = 1$ (formule centrée).
   On aimerait maintenant trouver la formule numérique d'approximation de la dérivée première lorsqu'on prend deux termes de la dérivée première du polynôme de Newton Grégory pour $s = 2$. Trouver cette formule. Existe-elle et/ou est-elle équivalente à une des formules existant dans la table de formule que je vous ai donnée ?
   <8 pts>

Réponse

1.

Il s'agit d'une formule d'ordre 2 et centrée donc qui résulte de la prise du premier terme de la dérivée seconde du polynome de collocation d'ordre 2 en posant ensuite $s = 1$ (car la formule est centrée). Le polynome de collocation et sa dérivée première et deuxième sont :

$$\begin{aligned}
P_2(s) &= f_0 + \frac{s}{1!}\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\,\Delta^3 f_0 + \dots \\
P_2'(s) &= \frac{1}{h}\Big[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2s-1)\,\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}\big(3\,s^2 - 6\,s + 2\big)\Delta^3 f_0 + \dots\Big] \\
P_2''(s) &= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0 + \dots\right] \\
P_2''(s=1)|_{\text{prise de 1 terme}} &= P_2''(x_1) = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{h^2} = \frac{(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0)}{h^2} = \frac{f_2 - 2\,f_1 + f_0}{h^2}
\end{aligned}$$

$$\text{et par translation d'indice, on trouve :} \quad f_0'' = f''(x_0) \quad = \quad \frac{f_1 - 2\,f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

<8 pts>

2.

On peut utiliser le fait, qu'une dérivée seconde est la dérivée première d'une dérivée première et, en utilisant seulement la formules de dérivée première du premier ordre (ou les plus simples) à droite ou à gauche :

$$f_1' = \frac{f_1 - f_0}{h} \quad \text{(dérivée à gauche) et,} \quad f_0' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} \quad \text{(dérivée à droite)}$$

$$\text{donc :} \qquad f_0'' = \frac{f_1' - f_0'}{h} = \frac{\frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{f_0 - f_{-1}}{h}}{h} = \frac{f_1 - 2\,f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

<6 pts>

Nota -1- : Un autre raisonement, tout aussi valable, consiste à utiliser les dérivées premières centrées en $h/2$, *i.e.*;

$$f_0'' = \frac{f'(x_0 + h/2) - f'(x_0 - h/2)}{h} = \frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}}{h} = \frac{f_1 - 2\,f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

Nota -2- : Un autre raisonement valable consiste à utiliser : $f_0' = (f_1 - f_0)/h$, donc $f_0'' = (f_1' - f_0')/h$ avec : $f_0' = (f_1 - f_0)/h$ et $f_1' = (f_2 - f_1)/h$ pour trouver $f_0'' = (f_2 - 2f_1 + f_0)/h^2$ et par translation d'indices : $f_0'' = (f_1 - 2f_0 + f_{-1})/h^2$

3.

En additionnant : $f_1 = f_0 + h\,f'(0) + \frac{h^2}{2} f_0'' + \mathcal{O}(h^2)$ et $f_{-1} = f_0 - h\,f'(0) + \frac{h^2}{2} f_0'' + \mathcal{O}(h^2)$

avec $-\,2\,f_0$

$$\text{on trouve immédiatement :} \quad f_0'' = f''(x_0) \quad = \quad \frac{f_1 - 2\,f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

<5 pts>

4.

Pour $s = 2$, on a $x = x_2$ et en utilisant la dérivée première du Polynôme de collocation donnée dans le cours, on trouve :

$$
\begin{aligned}
P'(x_2)|_{(2\text{ termes})} &= \frac{1}{h}\Big\{\Delta f_0 + \frac{3}{2}\Delta^2 f_0\Big\} = \frac{1}{h}\Big\{(f_1 - f_0) + \frac{3}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_2)\Big\} = \frac{1}{h}\Big\{(f_1 - f_0) + \frac{3}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)\Big\} \\
f_2' &= \frac{(3f_2 - 4f_1 + f_0)}{2h}
\end{aligned}
$$

En fait, on retrouve la même formule que celle donnée dans la table et trouvée pour $s = 0$, *i.e.* ;

$$
f_0' = \frac{(-3f_0 + 4f_1 - f_2)}{2h}
$$

en inversant le sens des indices ($x_2 \leftrightarrow x_0$, $x_1 \leftrightarrow x_1$, $x_0 \leftrightarrow x_2$) et en compensant cette inversion en inversant le signe de cette approximation. Mis à part cette différence, il s'agit donc de la même formule numérique d'approximation.
<8 pts>

IV. Résolution d'Équation Différentielle (10 pts)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$
y'(t) = f(t, y(t)) = 1 + t\,y(t) \tag{3}
$$

avec la condition initiale $y_0 = y(t = 0) = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler et avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y_1 = y(0.2)$ et $y_2 = y(0.4)$ (donner les résultats en arrondissant et en gardant au moins trois décimales).
 <5 pts>
2. Résoudre cette équation différentielle avec la méthode d'Euler modifiée et toujours avec un pas $h = 0.2$. Calculer seulement $y(0.2)$ et $y(0.4)$, (arrondisser et garder au moins quatre décimales).
 <5 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Par la méthode d'Euler, la relation itérative à considérer est donc, avec $h = 0.2$ et $y_0 = 0$

$$
y_{n+1} = y_n + h\,\big(1 + t_n\,y_n\big)
$$

<2 pts>

Les valeurs de t_n et y_n sont données dans le tableau ci-dessous

n	t_n	y_n
0	0.0	0.000
1	0.2	0.200
2	0.4	0.408

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

Par la méthode d'Euler modifiée, on a les relations itératives suivantes :

$$
\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\,\underbrace{\big(1 + t_n\,y_n\big)}_{f(t_n, y_n)} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big) = y_n + \frac{h}{2}\big(1 + t_n\,y_n + 1 + t_{n+1}\,\tilde{y}_{n+1}\big)
$$

<1 pt>

Les valeurs de t_n, y_n et $\tilde{y}_n$ sont reportées dans le tableau ci-dessous :

n	t_n	$\tilde{y}_n$	y_n
0	0.0	0.000	0.000
1	0.2	0.200	0.204
2	0.4	0.412	0.425

<4 pts>

V. Système d'Équations Différentielles (15 pts)

Soit le problème du pendule double que vous devez solutionner pour un cas particulier (cf. Fig. 1) et qui conduit au système d'équations différentielles suivantes, pour les fonctions $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$:

$$\left\{\begin{array}{ll} (m_1+m_2)L_1^2\Theta_1'' + m_2L_1L_2\Theta_2''\cos(\Theta_1-\Theta_2) + m_2L_1L_2(\Theta_2')^2\sin(\Theta_1-\Theta_2) & = -(m_1+m_2)L_1g\sin(\Theta_1) \\ m_2L_2^2\Theta_2'' + m_2L_1L_2\Theta_1''\cos(\Theta_1-\Theta_2) - m_2L_1L_2(\Theta_1')^2\sin(\Theta_1-\Theta_2) & = -(m_2)L_2g\sin(\Theta_2) \end{array}\right.$$

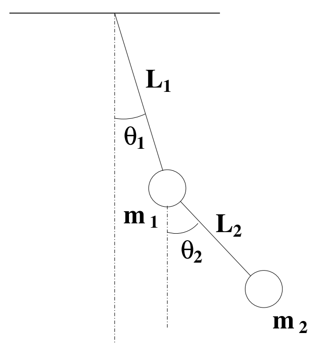


FIG. 1 – Problème du pendule double dans lequel les fonctions $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$ sont l'évolution des angles Θ_1 et Θ_2 en fonction du temps t.

Nous allons supposer que les masses m_1 et m_2 sont égales à 1 kg. et que les longueurs L_1 et L_2 sont égales à 1 mètre pour simplifier le calcul numérique. La constante gravitationnelle est approximée à 10 m/sec^2. Numériquement, on obtient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\Theta_1'' + \Theta_2''\cos(\Theta_1-\Theta_2) + (\Theta_2')^2\sin(\Theta_1-\Theta_2) & = & -20\,\sin(\Theta_1) \\ \Theta_2'' + \Theta_1''\cos(\Theta_1-\Theta_2) - (\Theta_1')^2\sin(\Theta_1-\Theta_2) & = & -10\,\sin(\Theta_2) \end{array}\right. \tag{4}$$

et en éliminant tour à tour Θ_2'' de la première équation et Θ_1'' de la deuxième équation (ou découplage), on trouve :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Theta_1'' & = & \frac{g[\cos(\Theta_1-\Theta_2)\sin\Theta_2-2\sin\Theta_1]-[(\Theta_1')^2\cos(\Theta_1-\Theta_2)+(\Theta_2')^2]\sin(\Theta_1-\Theta_2)}{2-\cos^2(\Theta_1-\Theta_2)} \\ \Theta_2'' & = & \frac{2g[\cos(\Theta_1-\Theta_2)\sin\Theta_1-\sin\Theta_2]+[2(\Theta_1')^2+(\Theta_2')^2\cos(\Theta_1-\Theta_2)]\sin(\Theta_1-\Theta_2)}{2-\cos^2(\Theta_1-\Theta_2)} \end{array}\right. \tag{5}$$

Initialement l'angle $\Theta_1(t=0)=\pi/4$ radians et l'angle $\Theta_2(0)=0$ radian. Il n'y a pas de vitesse initiale, donc $\Theta_1'(0)=\Theta_2'(0)=0$. On vous demande de :

1. Expliquer pourquoi l'opération de découplage (passage du système (4) au système (5)), est nécessaire pour utiliser ensuite une méthode numérique pour résoudre ce système d'équations différentiel.
   <3 pts>

2. Réécrire ce système en un système d'équations différentielles du premier ordre (pour lequel on a précisé les conditions initiales).
   <6 pts>
3. Si on utilise la méthode d'Euler ordinaire pour résoudre ce système d'équations différentielles, préciser qu'elle serait le système de relations itératives qui serait obtenu.
   <6 pts>

Réponse

$\boxed{\textbf{1.}}$

Cela est nécessaire car les méthodes de changement de variables vues en cours pour convertir une équation différentielle du 2ième ordre en un système de 2 équations différentielles du 1er ordre nécessitent d'exprimer, dans un premier temps (*i.e.* avant changement de variables), cette équation sous la forme $y''(t) = f($ des autres fonctions (solution du système) que l'on cherche à déterminer mais de dérivée d'ordre strictement inférieur à deux).

Si on faisait le changement de variable que l'on fera à la question 2., le système itératif se retrouverait coincé ; à l'instant t, une variable demanderait la connaissance d'une autre qui elle même demanderait la connaissance de la première variable au même instant !

<3 pts>

$\boxed{\textbf{2.}}$

En posant $\Theta_1'(t) = d\Theta_1(t)$ et $\Theta_2'(t) = d\Theta_2(t)$, chaque équation différentielle du second ordre se transforme en deux équations différentielles du premier ordre et on trouve finalement le système de 4 équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Theta_1' & = & d\Theta_1 \\ \Theta_2' & = & d\Theta_2 \\ d\Theta_1' & = & \frac{g[\cos(\Theta_1-\Theta_2)\sin\Theta_2 - 2\sin\Theta_1] - [(d\Theta_1)^2\cos(\Theta_1-\Theta_2) + (d\Theta_2)^2]\sin(\Theta_1-\Theta_2)}{2-\cos^2(\Theta_1-\Theta_2)} \\ d\Theta_2' & = & \frac{2g[\cos(\Theta_1-\Theta_2)\sin\Theta_1 - \sin\Theta_2] + [2(d\Theta_1)^2 + (d\Theta_2)^2\cos(\Theta_1-\Theta_2)]\sin(\Theta_1-\Theta_2)}{2-\cos^2(\Theta_1-\Theta_2)} \end{array} \right.$$

Avec les conditions initiales $\Theta_1(0) = \pi/4$, $\Theta_1(0) = 0$ et $d\Theta_1(0) = d\Theta_2(0) = 0$.

<6 pts>

$\boxed{\textbf{3.}}$

On obtient, avec la méthode d'Euler ordinaire, le système de relations itératives suivantes (en mettant l'itération au temps n en exposant$^{[n]}$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Theta_1^{[n+1]} & = & \Theta_1^{[n]} + h\, d\Theta_1^{[n]} \\ \Theta_2^{[n+1]} & = & \Theta_2^{[n]} + h\, d\Theta_2^{[n]} \\ d\Theta_1^{[n+1]} & = & d\Theta_1^{[n]} + h\left\{ \frac{g[\cos(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})\sin\Theta_2^{[n]} - 2\sin\Theta_1^{[n]}] - [(d\Theta_1^{[n]})^2\cos(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]}) + (d\Theta_2^{[n]})^2]\sin(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})}{2-\cos^2(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})} \right\} \\ d\Theta_2^{[n+1]} & = & d\Theta_2^{[n]} + h\left\{ \frac{2g[\cos(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})\sin\Theta_1^{[n]} - \sin\Theta_2^{[n]}] + [2(d\Theta_1^{[n]})^2 + (d\Theta_2^{[n]})^2\cos(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})]\sin(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})}{2-\cos^2(\Theta_1^{[n]}-\Theta_2^{[n]})} \right\} \end{array} \right.$$

<6 pts>

Nota : On obtiendrait pour Θ_1 et Θ_2 les graphes suivants :

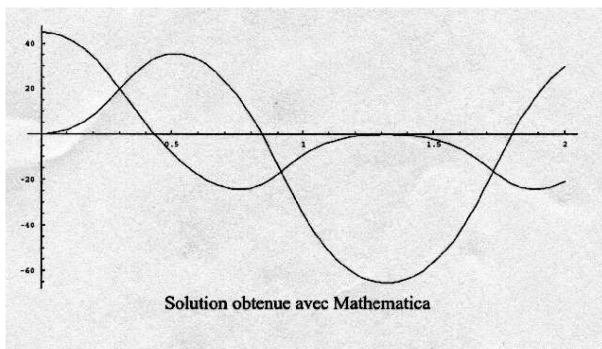


FIG. 2 – Solution du pendule double. Évolution des fonctions $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$ en fonction du temps t.